

Stoffübergang in durchströmten, rotierenden Relativsystemen

Aussagefähigkeit der Naphthalin-Sublimations-Methode

Vom Fachbereich Maschinenbau
der Technischen Universität Darmstadt
zur
Erlangung des Grades eines Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

DISSERTATION

vorgelegt von

Michael Kloss M.Sc.

aus Münster

Berichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Heinz-Peter Schiffer
Mitberichterstatter:	Prof. Dr.-Ing. Peter Stephan
Tag der Einreichung:	18.11.2014
Tag der mündlichen Prüfung:	17.02.2015

Darmstadt, 2015
D17

Bring vor, was wahr ist.
Schreib so, dass es klar ist.
Und verficht's, bis es mit dir gar ist!

Ludwig Boltzmann

Danksagung

Herrn Professor Schiffer vom Fachgebiet Gasturbinen, Luft- und Raumfahrtantriebe (GLR) der TU Darmstadt danke ich für das mir entgegengebrachte Vertrauen, die Möglichkeit meine Forschungen ohne jede Einschränkung durchzuführen, den ausnahmslosen Rückhalt und die stets angenehme Arbeitsatmosphäre sowie die Übernahme des Referats.

Mein weiterer Dank gilt Herrn Professor Stephan vom Fachgebiet Technische Thermodynamik der TU Darmstadt für die fachlichen Anregungen, für das mir entgegengebrachte Vertrauen und für die Übernahme des Korreferats.

Ebenso danke ich den Mitarbeitern der Werkstatt des GLR sowie Herrn Rolf Boelcke und Herrn Fred Becker von der Elektronikwerkstatt Maschinenbau für die stets schnelle und kompetente Mithilfe beim Bau des Rotationsprüfstandes und den vielen weiteren technischen Ausrüstungen.

Für die unkomplizierte Hilfe bei den mikroskopischen Analysen danke ich weiterhin Frau Jutta Braun und Herrn Christoph Oberhausen von OptoSys Optische Komponenten & Systemlösungen GmbH.

Weiterhin gilt mein Dank dem Team des Department of Radiology, Medical Physics der Universitätsklinik Freiburg und dem Team der Forschungsgruppe Magnetic Resonance Velocimetry des Center of Smart Interfaces der TU Darmstadt unter Leitung von Herrn Sven Grundmann.

Herrn Nils Winter vom GLR sowie Herrn Florian Höfler vom Institut für Thermodynamik der Luft- und Raumfahrt der Universität Stuttgart gebührt mein aufrichtiger Dank für die Bereitstellung von Messdaten.

Gleichermaßen danke ich den von mir betreuten Studenten für deren engagierte Mithilfe und das mir entgegengebrachte Vertrauen.

Ein großer Dank gilt auch den Sekretärinnen des GLR, Frau Birgitt Wißmann und Frau Barbara Löhr, die mich bei allen formalen Aufgaben im Rahmen der von mir betreuten Projekte unterstützt haben.

Meinen Teamkollegen Daniela Klaubert, Lucas Giller, Nils Winter und Andreas Lerch sowie den restlichen Kollegen am GLR danke ich für die angenehme und stets motivierende Arbeitsatmosphäre sowie die vielen hilfreichen fachlichen Diskussionen.

Für die fundierten inhaltlichen wie sprachlichen Korrekturen der Dissertation gilt mein besonderer Dank Andreas Lerch, Claudius Linker und meinen Eltern.

Ganz besonders danke ich meinen Eltern, Anne und Peter Kloss, meinen Freunden Siegrid und Peter Kiel, Danny Klaubert, Hedi und Lucas Giller, die mich durch alle Höhen und Tiefen begleitet und immer gestützt und motiviert haben. Sie haben einen sehr großen Anteil zum Gelingen dieser Dissertation beigetragen.

Kurzdarstellung

Stoffübergang in durchströmten, rotierenden Relativsystemen

Aussagefähigkeit der Naphthalin-Sublimations-Methode

In der Angewandten Forschung, vor allem für den Bereich der weit entwickelten Technologie der Turbomaschine, ist die Naphthalin-Sublimations-Methode (NSM) ein etabliertes experimentelles Verfahren zur Untersuchung von Kühlsystemen. Die NSM ist dabei Teil eines Vorgehens, hier Skalierte Analogie Methode (SAM) genannt, das die Skalierung eines Strömungssystems und die Ausnutzung der Analogie von Wärme- und Stofftransport zur Basis hat.

In dieser Arbeit wird die Unsicherheit der SAM ermittelt und deren Eignung für die Beantwortung zukünftiger wissenschaftlicher Fragestellungen anhand repräsentativer Validierungsfälle bestimmt.

Zur Bestimmung der Unsicherheit der SAM wird eine theoretische Betrachtung durchgeführt. Weiterhin wird die Ungenauigkeiten der NSM experimentell quantifiziert.

Die theoretische Betrachtung liefert Unsicherheiten, die primär aus den notwendigen Vereinfachungen der beschreibenden Gleichungen folgen. Es wird gezeigt, dass diese vereinfachenden Annahmen nur bedingt mit den tatsächlich vorherrschenden Bedingungen kongruent sind.

Die Ungenauigkeit der NSM wird durch Doppelproben-Sublimations-Experimente quantifiziert. Variiert werden dabei geometrische Parameter der Proben und die Art der mechanischen Nachbearbeitung der Naphthalin-Schicht. Ebenfalls ermittelt wird der Einfluss einer Entgasung der Naphthalin-Schmelze, die zur Schichterzeugung genutzt wird. Weiterhin liefert die lichtmikroskopische Untersuchung aller Proben einen Grund für die Ungenauigkeit der NSM in Form von bisher nicht in diesem Zusammenhang beobachten, zeitvarianten Poren in der Naphthalin-Schicht.

Zur Validierung der SAM werden mit dieser die Zyklon- und die Prallkühlung als repräsentative Kühlmethode von Turbinenschaukeln untersucht. Variiert werden dabei die Parameter Reynolds-Zahl, Rotationszahl, Filmkühlabnahme und Anstellwinkel zur Rotationsachse. Die gemessenen Daten lassen sich im Falle der Prallkühlung durch ein analytisches Modell vorhersagen, das unabhängig von den Messdaten entwickelt wird.

Abstract

Mass Transfer in Rotating Flow Systems

Significance of Naphthalene Sublimation Technique

The naphthalene sublimation technique (NST) is a well-established experimental method for investigations of cooling systems in applied research, especially in highly developed technologies such as turbo engines. It is part of a procedure, herein after called scaled analogy method (SAM), which is based on the scaling of flow systems and the utilisation of the analogy of heat and mass transfer.

The uncertainty and the suitability of the SAM for future scientific issues are subject of this work. Both will be determined and partly quantified. Apart from this the validity of the SAM is ascertained by representative cases of cooling system investigations.

A theoretical consideration and an experimental quantification of the inaccuracy of the NST are used to determine the uncertainty of the SAM.

The theoretical consideration yields uncertainties, which are primarily consequences of necessary simplifications of the basic equations. It is shown that these simplifying assumptions and the actual conditions are incongruent.

The inaccuracy of the NST is quantified by dual specimen sublimation experiments. In this investigation some geometrical parameters of the specimens and the kind of surface machining are varied. Furthermore it is analysed if a degassing of the molten naphthalene influences the later crystalline naphthalene layer. In addition to surface measurements the light microscopic investigation of all specimens yield a possible reason for the inaccuracy of the NST in the form of time variant pores in the naphthalene layer, which are unknown in this context up to now.

The validation of the SAM is performed by its use to investigate the cyclone cooling and the impingement cooling as representative turbine blade cooling methods. Varied parameters are the Reynolds number, the rotation number, the film cooling rate and the pitch angle.

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	i
Abbildungsverzeichnis	iii
Tabellenverzeichnis	v
Nomenklatur	vii
1 Motivation und Ziel	1
2 Stand der Forschung und Technik	3
2.1 Skalierte Analogie Methode (SAM)	5
2.2 Naphthalin Sublimations Methode als renommierte Messmethode	6
2.3 Abbildung von Wärme- und Stoffübergang	8
2.4 Untersuchungen zu konvektiven Kühlmethoden von Turbinenschaufeln	13
2.5 Prallkühlung	14
2.6 Zyklonkühlung	16
2.7 Fazit zum Stand der Forschung und Technik	17
3 Vorgehen	19
3.1 Experimentelles Vorgehen	19
3.1.1 Doppelprouben-Sublimations-Experiment	20
3.1.2 Probengenerierung	20
3.1.3 Optische Auflichtmikroskopie	21
3.1.4 Beschichtung der Kühlkanalmodelle	22
3.1.5 Optische Oberflächenvermessung	23
3.1.6 Rotationsprüfstand	25
3.1.7 Magnetic Resonance Velocimetry	26
3.2 Theoretisches Vorgehen	30
4 Theoretische Betrachtungen	31
4.1 Theorie der SAM	31
4.1.1 Herleitung der Gleichungen der SAM	32
4.1.2 Verwendete Materialgleichungen	35
4.1.3 Gleichungen der SAM in absoluten Variablen	38
4.1.4 Gleichungen der SAM in dimensionslosen Variablen	38
4.1.5 Entdimensionierung der Gleichungen der SAM	40
4.1.6 Postulate zur Gewinnung der Gleichungen der SAM	48
4.2 Unsicherheit der SAM	49
4.2.1 Bedingungen der stationären Massendichte	49
4.2.2 Bedingungen der Inkompressibilität	50

4.2.3	Einfluss von Divergenz, Dissipation und molarem Transport . . .	51
4.2.4	Einfluss der Gravitation	57
4.2.5	Abschätzung der Konstanz der Materialkoeffizienten	59
4.2.6	Folge aus den Vereinfachungen	82
4.3	Skalierbarkeit der Bewegungsgleichung	87
4.4	Kernaussagen der theoretischen Betrachtung	89
5	Experimentelle Ergebnisse	91
5.1	Reproduzierbarkeit der Naphthalin-Sublimations-Methode	91
5.1.1	Vermessung nahe eines Dralllochs	91
5.1.2	Sublimationsverhalten von Naphthalin-Schichten	97
5.1.3	Kernaussagen zur Reproduzierbarkeit	116
5.2	Experimentelle Untersuchung der Prallkühlung	116
5.2.1	Stoffübergang der Prallkühlung	117
5.2.2	Strömung der Prallkühlung	124
5.2.3	Analytisches Modell der Freistrahlskrümmung	126
5.3	Experimentelle Untersuchung der Zyklonkühlung	134
5.3.1	Stoffübergang der Zyklonkühlung	135
5.3.2	Strömung der Zyklonkühlung	139
6	Eignung der Skalierten Analogie Methode	143
7	Zusammenfassung	147
8	Ausblick	151
	Literaturverzeichnis	160
A	Daten zu den verwendeten Kühlkanalgeometrien	161
B	Boltzmann Transportgleichungen	163
B.1	Boltzmann Transportgleichungen eines einkomponentigen Gases	164
B.2	Boltzmann Transportgleichungen eines mehrkomponentigen Gases . . .	164
C	Momente von Spezies	166
C.1	Momente einer Spezies eines einkomponentigen Fluids und dessen Erhaltungsgleichungen	166
C.1.1	Momente der Masse der Spezies eines einkomponentigen Fluids	167
C.1.2	Momente des Impulses der Spezies eines einkomponentigen Fluids	168
C.1.3	Momente der Energie der Spezies eines einkomponentigen Fluids	169
C.2	Momente einer Spezies als Gemischkomponente und deren Erhaltungsgleichungen	170
C.2.1	Momente der Masse einer Spezies als Gemischkomponente . . .	171
C.2.2	Momente des Impulses einer Spezies als Gemischkomponente .	172
C.2.3	Momente der Energie einer Spezies als Gemischkomponente . .	173

C.2.4	Produktionsterme des Gemisches	174
D	Allgemeine Erhaltungsgleichungen	175
E	Äquivalenz der massengemittelten Geschwindigkeit	178
F	Kopplung der allgemeinen Erhaltungsgleichungen	179
F.1	Kopplung der allgemeinen Erhaltungsgleichungen eines einkomponentigen Fluids	179
F.2	Kopplung der allgemeinen Erhaltungsgleichungen eines Gemisches . .	180
F.3	Gekoppelte Erhaltungsgleichungen	182
G	Umformung der gekoppelten Erhaltungsgleichungen	183
G.1	Umformung der gekoppelten Erhaltungsgleichungen eines einkomponentigen Fluids	183
G.2	Umformung der gekoppelten Erhaltungsgleichungen eines Gemisches .	184
G.3	Erhaltungsgleichung der Diffusionsmassenströme	185
G.4	Bedingungen zur Entsprechung der gekoppelten Erhaltungsgleichungen eines Gemisches und der eines einkomponentigen Fluids	186
H	Materialgleichungen von Gasen	187
H.1	Bestimmung der Spannung	187
H.2	Kopplung von innerer Energie und Temperatur	189
H.3	Kopplung von Druck, Massendichte und Temperatur	191
H.4	Bestimmung der Wärmeleitung	192
H.5	Bestimmung der Diffusionsgeschwindigkeit	193
I	Spezielle gekoppelte Erhaltungsgleichungen	198
J	Vereinfachungen des Heißgas-Systems	201
K	Vereinfachungen der Stokes'schen Reibung	203
L	Impulserhaltungsgleichung im rotierenden Relativsystem	204
L.1	Beschreibung eines Vektors in einem Relativsystem	204
L.2	Impulserhaltung mit Größen des Relativsystems	206
M	Zerlegung der Impulserhaltung im Grenzfall II	209
N	Entdimensionierung der Impulserhaltungsgleichung Grenzfall II	211
N.1	Substitution	211
N.2	Entdimensionierung in x-Richtung	212
N.2.1	Substituierte Gleichung	212
N.2.2	Entdimensionierte Gleichung	212
N.3	Entdimensionierung in y-Richtung	212
N.3.1	Substituierte Gleichung	212
N.3.2	Entdimensionierte Gleichung	213

N.4	Entdimensionierung in z-Richtung	213
N.4.1	Substituierte Gleichung	213
N.4.2	Entdimensionierte Gleichung	213
O	Erweitertes gaskinetisches Transportmodell	214
O.1	Transport einer makroskopischen Variable	214
O.2	Mittlere freie Weglänge	216
O.3	Kollisionsfrequenz	216
O.4	Thermische Geschwindigkeit	218
O.5	Teilchenstromdichte bei 1/6 Modell	219
O.6	Transport einer makroskopischen Variable bei zweikomponentigem Gas und 1/6 Modell im lokal thermodynamischen Gleichgewicht	219
P	Anwendung des erweiterten gaskinetischen Transportmodells	220
Q	Verwendete Werte in den teilchenkinetischen Modellen	221
Q.1	Verwendete Werte zur Validierung des ETM	221
Q.2	Verwendete Werte im ETM für Naphthalin-Luft-Gemisch	222
Q.3	Molare Wichtung	223
Q.3.1	Molare Wichtung der Viskosität	223
Q.4	Wichtungsmodell zur Viskosität von Gemischen	223
Q.5	Modelle zum Diffusionskoeffizienten von binären Gemischen	223
Q.6	Empirische Korrelationen	225
Q.7	Freiheitsgrade von Teilchen	228
R	Algebraische Behandlung von Tensoren	229
R.1	Algebraische Umformung Spannungstensor	229
R.2	Kronecker Delta	230
R.3	Summenkonvention	230
R.4	Indizierung bei Summenkonvention	231
S	Herleitung des Modells der Freistrahlskrümmung	232
S.1	Stromfadenverlauf bei Orthogonalität von ω und u	232
S.2	Freistrahlskrümmung	233
T	Stoffübergang bei der Zyklonkühlung	236

Abbildungsverzeichnis

2.1	Beispielhafte Darstellung einer Schaufelkühlung einer Gasturbine	4
2.2	Prinzipskizze zur Naphthalin Sublimations Methode bei rein diffusivem Transport und bei einem Prallstrahl	7
2.3	Eindimensionaler diffusiver (d.) und diffusiv, konvektiver (d.+k.) Transport der Größe f durch das Potential der Größe g in orthogonaler Richtung x_w zur diabaten Wand bei $x_w = 0$	10
2.4	Geometrie des generischen Prallkühlkanals	15
2.5	Geometrie des generischen Zyklonkühlkanals	16
3.1	Vorgehen zur Eignungsbestimmung der SAM	19
3.2	Maßstäbliche Skizze des Windkanals mit Doppelproben; Basisquelle [1]	21
3.3	Prinzipskizze der Entgasungs- und Beschichtungsanlage zur Generierung der Naphthalin-Proben bei Helium-Atmosphäre	22
3.4	Prinzipskizze der Schichtdickenvermessung	24
3.5	Pulsation und Lagekorrektur bei der Oberflächenvermessung	25
3.6	Rotationsprüfstand mit den wesentlichen Komponenten	27
3.7	Experimentaufnahme des Rotationsprüfstandes	29
4.1	Herleitungsstruktur der Gleichungen der SAM	33
4.2	Definitionen der Koordinaten	46
4.3	Verdeutlichung der Größen zur Abschätzung	52
4.4	Vergleich der Modelle zur Beschreibung der dynamischen Viskosität bei festem Massenanteil	62
4.5	Vergleich der Modelle zur Beschreibung der dynamischen Viskosität bei fester Temperatur; Quelle: Q1= [2]	63
4.6	Dynamische Viskosität von Naphthalin-Dampf, Luft, -Gemisch	65
4.7	Dynamische Viskosität von Luft	66
4.8	Wärmekapazität von Luft	68
4.9	Wärmekapazität von Naphthalin-Dampf, Luft, -Gemisch	69
4.10	Wärmeleitfähigkeit von Luft	70
4.11	Wärmeleitfähigkeit von Naphthalin-Dampf, Luft, -Gemisch	71
4.12	Wärmeleitfähigkeit von Naphthalin-Dampf	72
4.13	Eucken Korrektur-Faktor von Naphthalin-Dampf, Luft, -Gemisch	75
4.14	Isentropenexponent von Naphthalin-Dampf, Luft, -Gemisch	76
4.15	Diffusionskoeffizient beim Naphthalin-Luft-Gemisch	77
4.16	Integraler und logarithmischer Mittelwert sowie relative Variation	85
5.1	Zyklonkanal für Stoffübergangsmessungen mittels NSM in [3]	92
5.2	Gemessene Verteilung von Sh	94
5.3	Verlauf von Sh mit der Messdauer	94

5.4	Gemessene Verteilung von ΔS	95
5.5	Steigung der linearen Regression von $Sh(t)$	95
5.6	Verlauf von ΔS mit der Messdauer	96
5.7	Extrapolierte Schichtdickendifferenz $\Delta S(t = 0)$	96
5.8	Exemplarische Verteilung der Schichtdickendifferenz einer Probe	98
5.9	Schichtdickenänderung der Proben aus unbehandelter Naphthalin-Schmelze	99
5.10	Schichtdickenänderung der Proben aus entgaster Naphthalin-Schmelze	100
5.11	Unterschiedliches und gleiches Anfangsverhalten	101
5.12	Relative Schichtdickenänderung der Proben aus unbehandelter Naphthalin-Schmelze	103
5.13	Relative Schichtdickenänderung der Proben aus entgaster Naphthalin-Schmelze	104
5.14	Mikroskopische Schliffbilder am Anfang und am Ende eine Messserie .	105
5.15	Detailliertes mikroskopische Schliffbild einer Probe	106
5.16	Visualisierung der Theorien zur Ursache und Wachstum der Poren . . .	107
5.17	Identifikation von Poren	108
5.18	Überlagerung von Oberflächenkontur und Schliffbild	109
5.19	Beispiele zur Anzahl und Größe der Poren, sowie deren Vergleich zur Positioniergenauigkeit der Proben	110
5.20	Molekulares Verhalten von Kristallen	113
5.21	Verteilung von Sh auf Wand C des Prallkühlkanals bei unterschiedlichen Dauern	118
5.22	Vergleich der Verteilung von Sherwood-Zahl Sh und Nusselt-Zahl Nu .	120
5.23	Verteilung Sh bei zwei verschiedenen Re jeweils mit und ohne Rotation	122
5.24	Einfluss der Systemrotation auf die Verteilung Sh	123
5.25	Einfluss der Art der Massenabfuhr mit und ohne Systemrotation	124
5.26	Mit MRV bestimmte Strömung im Segment der Prallkühlung	125
5.27	Geschwindigkeitsprofil des Freistrahls aus Bohrung A2 an verschiedenen Lauflängenpositionen	126
5.28	Prinzipielles Ergebniss des Modells zur Freistrahlskrümmung bei quadratischem Geschwindigkeitsprofil	128
5.29	Ergebnis des Modells zur Freistrahlskrümmung bei Blockprofil und Parabelprofil unter repräsentativen Bedingungen des Prallkühlkanals . . .	129
5.30	Exemplarischer Vergleich von gemessenen Sh Verteilungen und mit Modell berechneten Auftreffkonturen bei verschiedenen Anstellwinkeln α	132
5.31	Vergleich Auftreffkontur Experiment und Anwendung	134
5.32	Vergleich von Sh/Sh_{relation} , ΔS und Fotoaufnahme der Schicht im Bereich der Dellen	136
5.33	Axialgeschwindigkeit u der Zyklonströmung ohne Filmkühlabnahme .	140
5.34	Querschnitte der Geschwindigkeiten in y -Richtung v sowie der Tangentialgeschwindigkeiten u_{tan} der Zyklonströmung ohne Filmkühlabnahme	140
5.35	Axialgeschwindigkeit u der Zyklonströmung mit Filmkühlabnahme . .	141

5.36	Querschnitte der Geschwindigkeiten in y -Richtung v sowie der Tangentialgeschwindigkeiten u_{tan} der Zyklonströmung mit Filmkühlabnahme	141
L.1	Vektoren im Inertial- und Relativsystem	204
L.2	Einheitsvektoren im Inertial- und Relativsystem	205
L.3	Geschwindigkeitsvektoren im Inertial- und Relativsystem	206
O.1	Vereinfachte Modellvorstellungen zum ETM	217
S.1	Skizzen zum Stromfadenverlauf des Modells der Freistrahlskrümmung .	232
S.2	Koordinatendefinition zur Berechnung des Stromfadenverlaufs	234

Tabellenverzeichnis

4.1	Ergebnisse der theoretischen Betrachtung	86
5.1	Vermessene Parameterkonfigurationen des Stoffübergangs im Prallkühlkanal	117
5.2	Sherwood- und Nusselt-Zahlen im Bereich der Auftreffgebiete auf Wand C	121
5.3	Vermessene Parameterkonfigurationen beim Zyklonkühlkanal	135
5.4	Sherwood-Zahl-Verteilungen bei der Zyklonkühlung mit vollständiger und ohne Filmkühlabnahme sowie mit und ohne Systemrotation	138
A.1	Quantitative geometrische Eigenschaften des Zyklonkühlkanals für Stoffübergangsmessungen	161
A.2	Quantitative geometrische Eigenschaften des Prallkühlkanals für Stoffübergangsuntersuchungen	162
T.1	Sherwood-Zahl-Verteilung bei der Zyklonkühlung mit vollständiger und ohne Filmkühlabnahme sowie mit und ohne Systemrotation	237

Nomenklatur

Griechische Zeichen

α	Winkelkoordinate; Anstellwinkel; Wärmeübergangskoeffizient
β	Wandneigungswinkel
β_{ab}	Stoffübergangskoeffizient von Spezies a in b
β'	Auftreffwinkel eines Stromfadens
δ	Grenzschichtdicke
$\Delta_G H$	Sublimationsenthalpie
$\Delta_G U$	Sublimationsenergie
ΔM	Massenabnahme
ΔS	Schichtdickenänderung
$ \Delta Sh / Nu $	Relative Abweichung der SAM
$ \Delta Sh_{rel} $	Relative Abweichung der Sherwood-Zahl
$ \Delta S_{rel} $	Relative Abweichung der Schichtdickendifferenz
Δt	Messdauer
ΔT	Temperaturdifferenz
Δu_{ab}	Differenz der inneren Energie von Spezies a und b
ΔV_m	Volumenänderung
η	Dynamische Viskosität
κ	Anteil Massenabfuhr beim Prallkühlkanal; Isentropenexponent
Λ	Makroskopische Wirkung
λ	Wärmeleitfähigkeit
Φ	Makroskopische Variable
ϕ	Auftreffwinkel; Winkel zwischen Bohrungs- und Rotationsachse
Φ_{global}	Winkelkoordinate
Φ_{nm}	Energie zum Transfer eines Teilchens vom Ort n zum Ort m
ρ_a	Massendichte der Spezies a
$\rho_{a,\text{ref}}$	Partielle Massendichte des Sublimatdampfes am Referenzpunkt
$\rho_{a,w}$	Partielle Massendichte des Sublimatdampfes an der Wand
ρ_s	Massendichte der Komponente s
ρ_{sub}	Massendichte des Sublimats in der festen Phase
σ	Van der Waals Durchmesser
$\hat{\tau}_{ij}$	Schubspannungstensor
ω	Drehkreisfrequenz; Rotationsachse
$\vec{\omega}$	Rotationsvektor

$\bar{\xi}_a$	Dimensionsloser Massenanteil der Spezies a
ξ_s	Massenanteil der Spezies s

Lateinische Zeichen

a	Anstellpunkt, Schallgeschwindigkeit
A_o	Wandfläche eines Strömungskanals
A_\bullet	Querschnittsfläche eines Strömungskanals
abw_T	Abweichung zweier Temperaturmittelwerte
\vec{a}	Führungsbeschleunigung
B	Magnetische Flussdichte
c	Flächenschwerpunkt
c_p	Spezifische isobare Wärmekapazität
c_v	Spezifische isochore Wärmekapazität des Gemisches
$c_{v,s}$	Spezifische isochore Wärmekapazität der Komponente s
d	Durchmesser
D, D_{ab}	Molarer Diffusionskoeffizient von Spezies a in b
d_h	Hydraulischer Durchmesser
DK	Diffusionskoeffizient
dx	Gitterweite in x -Richtung
dy	Gitterweite in y -Richtung
D^T	Diffusionskoeffizient der temperaturbedingten Diffusion
$D_{\text{Thermodiffusion}}$	Diffusionskoeffizient der Thermodiffusion
Ec	Eckert-Zahl
EKF	Eucken Korrekturfaktor
F	Vorschubgeschwindigkeit (engl. feerate)
f	Größe, Variable, beliebige Funktion
FG	Anzahl an Freiheitsgraden
FKA	Filmkühlabname
Fr	Froude-Zahl
\dot{f}	Fluss der Größe, Variable f
g	Größe, Variable
G	Größe
g	Gravitationsfeldkonstante
\bar{G}	Ersatzfunktion zur formalen Vereinfachung
h	Spezifische Enthalpie
j_{ab,x_w}^*	Flächenspezifischer Stoffstrom der Spezies a in b in w_w -Richtung
K	Koeffizient

k_B	Boltzmann Konstante
KI	Koeffizient des rel. molaren Energietransports
\vec{k}	Massenkraft (massenspezifisch)
L_{char}	Charakteristische Länge
\dot{m}_α	Massenstromdichte der Spezies α
m_M	Teilchenmasse
m_s	Teilchenmasse der Komponente s
\dot{m}_{sub}	Flächenspezifischer sublimierender Massenstrom
\dot{n}_α	Verdampfungsrate
N_s	Teilchenanzahl (Stoffmenge) der Komponente s
\dot{n}_s	Teilchendichte der Komponente s
Nu	Nusselt-Zahl
p	Thermodynamischer Druck
$p_{p.\infty}$	Partieller Druck im Fernfeld
Pr	Prandtl-Zahl
p_s	Partieller Druck der Komponente s
p_v	Dampfdruck
\bar{p}	Dimensionsloser Druck
\tilde{p}	Normalspannungen
\dot{q}_i	Wärmestromdichte in i -Richtung
\dot{q}_{x_w}	Wärmestromdichte in x_w -Richtung
r	Radialkoordinate des Freistrahls
r_{char}	Charakteristischer Radius
R	Spezifische Gaskonstante des Gemisches
R_s	Spezifische Gaskonstante der Komponente s
Re	Reynolds-Zahl
Re_x	Reynolds-Zahl im exzentrischen Koordinatensystem
Ro	Rotationszahl
Ro_x	Rotationszahl im exzentrischen Koordinatensystem
Ro_{x_0}	Rotationszahl mit Exzentrizität in x -Richtung
Ro_{y_0}	Rotationszahl mit Exzentrizität in y -Richtung
\tilde{R}	Universelle Gaskonstante
s	Treibende Größe
Sc	Schmidt-Zahl
SF	Skalierungsfaktor
Sh	Sherwood-Zahl
$Sh_{relation}$	Willkürlicher Wert der Sherwood-Zahl zur Normierung
S_T	Soret-Koeffizient

T	Temperatur
t	Zeitkoordinate, Messdauer eines Versuchs der bei $t = 0$ beginnt
T_{ab}	Temperatur der Spezies a und b
$TermA$	Ersatzausdruck zur formalen Vereinfachung
$TermB$	Ersatzausdruck zur formalen Vereinfachung
T_m	Logarithmischer Mittelwert der Temperaturgrenzschicht
\bar{T}	Dimensionslose Temperatur
\bar{t}	Dimensionslose Zeit
u	Rel. Geschwindigkeit (Relativsystem); Drehkoordinate; Geschwindigkeitskomponente; innere Energie eines Gasgemisches
U	Unsicherheit
UK	Übergangskoeffizient
u_s	Innere Energie der Komponente s
u_{\tan}	Tangentialgeschwindigkeit
UZ	Übergangszahl
v	Geschwindigkeitskomponente
$VENC$	Geschwindigkeitskodierung (engl. velocity encoding)
w	Geschwindigkeit (Inertialsystem); Geschwindigkeitskomponente
w_{char}	Charakteristische Geschwindigkeit
\bar{w}	Dimensionslose Geschwindigkeit (Inertialsystem)
x	Raumkoordinate
x_0	Exzentrizität in x-Richtung des exzentrischen Koordinatensystems
x_a	Molanteil der Spezies a
x_w	Wandnormale Koordinate
x_{w0}	Mittenabstand zwischen Bohrung und Wand
x'	Raumkoordinate des exzentrischen Koordinatensystems
y	Raumkoordinate
y_0	Exzentrizität in y-Richtung des exzentrischen Koordinatensystems
y_w	Wandkoordinate
y'	Raumkoordinate des exzentrischen Koordinatensystems
z	Raumkoordinate
y_s	Auftreffpunkt in Wandkoordinaten
z_w	Wandkoordinate
z'	Raumkoordinate des exzentrischen Koordinatensystems

Lateinische Abkürzungen

AEGL	Allgemeine Erhaltungsgleichung
BTGL	Boltzmann Transportgleichung
char.	Charakteristische
diml.	Dimensionslose
E	Energie
EBM	Exaktes Boltzmann Modell
ESM	1/6 Modell
ETM	Erweitertes gaskinetisches Transportmodell
FS	Freistrah
GEGI	Gekoppelte Erhaltungsgleichung
GF	Grenzfall
I	Impuls
IA	Auftreffgebiet (engl. impingement area)
M	Masse
NSM	Naphthalin Sublimations Methode
P	Postulat
PSA	Phthalsäureanhydrid
RB	Randbedingung
SAM	Skalierte Analogie Methode
SEGL	Spezielle Erhaltungsgleichung
vollelast.	Vollelastisch
WS-	Wärme- oder /beziehungsweise Stoff-
WSA	Analogie von Wärme- und Stofftransport (Wärme Stoff Analogie)
WTM	Transportmodell nach Wilcke

Indizes

0	Bei $x_w = 0$
A	Am Austritt
BP	Blockprofil
<i>char</i>	Charakteristisch
d.	Diffusiv
d.+k.	Diffusiv und konvektiv
E	Am Eintritt
EBM	Exaktes Boltzmann Modell
Empirisch	Bezogen auf empirische Korrelation

empirisch	Empirisch ermittelter Einzelwert
FKB	Filmkühlbohrung
FS	Freistrah
HK	Hauptkanal
i	In Richtung $i \in \mathbb{N}[1;3]$
IA_A1	Im Bereich des Auftreffgebietes des Freistrahls aus Bohrung A1
IA_A2	Im Bereich des Auftreffgebietes des Freistrahls aus Bohrung A2
m	Mittlere, flächengemittelte
max	Maximum; maximal
min	Minimum; minimal
MW	Bezogen auf Mittelwert
<i>nom</i>	Nominell (Vorgabefestwert)
<i>ns</i>	Komponente n von s
physikalisch	Physikalisch definiert
Pore	Pore
PP	Parabelprofil
Re	Reynolds-Zahl
<i>ref</i>	Referenz
Ro	Rotationszahl
T	Temperatur
tan	Tangential
technisch	Technisch definiert
u	Geschwindigkeit
w	Wand
$ _I$	Ausgedrückt in Größen des Inertialsystems
$ _R$	Ausgedrückt in Größen des Relativsystems
∞	Fernfeld

Mathematische Operatoren

$\mathcal{O}(g)$	Landau-Symbol, Größenordnung von g
∇	Nabla-Operator
Δ	Laplace-Operator
$()^T$	Transponiert
$\circ \longrightarrow \bullet$	Abbildung als (angelehnt an Bild-Original-Transformation nach Laplace)
$\hat{=}$	Ist in diesem Fall gleich
$\stackrel{!}{=}$	Muss gleich sein
\equiv	Ist equivalent
δ_{ij}	Kronecker Delta
\forall	Gilt für alle
\approx	Nicht proportional

1. Motivation und Ziel

Die heutigen, vielseitigen und zugleich hohen Anforderungen an Maschinen, wie die Einhaltung der ökonomischen und technischen Randbedingungen, stellt deren Auslegung als ein Dilemma dar. Einerseits ist das möglichst umfassende und tiefgreifende Verständnis der in einer technischen Apparatur auftretenden physikalischen Vorgänge sehr hilfreich. Andererseits bedingt dieses einen aufwändigeren und damit unwirtschaftlicheren Entwicklungsprozess. Der ökonomisch bestmögliche Weg, so zeigt die Erfahrung, ist es, gerade so viele Informationen zur Auslegung einer Maschine zu erlangen, wie zur Erfüllung der technischen Anforderungen notwendig sind. Eine derartige Philosophie führt unweigerlich zu gesteigerten Anforderungen an die jeweilige Maschine einer neuen Generation, sowohl ökonomischer als auch technischer Art. Dieses Verhalten verursachte in vielen, seit Jahrzehnten florierenden Bereichen der Technik eine Ausreizung maschinenspezifischer Lösungskonzepte. In diesen Fällen sind vermarktungsfähige Neu- und Weiterentwicklungen nur mit der Beantwortung technischer Detailfragen zu bewerkstelligen. Die Lösungen dieser Fragestellungen fordern ein umfassendes Verständnis, das nur mittels wissenschaftlichem Vorgehen erreicht werden kann. Folglich hat die Forschung im Entwicklungsprozess einen sehr großen Anteil erlangt. Oft stellt sich diese als eine anwendungsnahe Forschung, das heißt als Angewandte Forschung dar, von welcher seitens des Entwicklungsprozesses stets nur zielorientierte Aussagen gefordert werden, die zur Erfüllung der technischen Anforderungen einer Maschine notwendig sind. Weitergehende Erkenntnisse, die eine Vermarktung einer Technologie nicht direkt beeinflussen, sind größtenteils nur von wissenschaftlichem Interesse. Sie werden, sofern sie eine ausreichende Allgemeingültigkeit besitzen, der Grundlagenforschung zugeordnet. Bei sehr detaillierten Fragestellungen allerdings, wie sie bei stark entwickelten Technologien vorkommen, lässt sich die Angewandte Forschung nicht von der Grundlagenforschung trennen. Eine derart weit entwickelte Technologie ist jene der Turbomaschine. In allen deren Einsatzbereichen wie Kraftwerksanlagen, Flugtriebwerke, Luftladesysteme von Kolbenmaschinen bis hin zu Kraftstoffpumpen von Raketenantrieben stößt die Angewandte Forschung an ihre Grenzen. Naturwissenschaftliche Fragestellungen, wie die Adaption neuartiger Materialien als Werkstoffe oder das Verhalten von mehrphasigen, reaktiven Strömungen, sind grundlegender Natur. Deren Beantwortung ist aber zur Entwicklung von Turbomaschinen der neuen Generation mittlerweile notwendig. Für viele etablierte Vorgehensweisen der Angewandten Forschung stellt sich daher die Frage, ob sie für Grundlagenuntersuchungen geeignet und aussagekräftig genug sind. Vor diesem Hintergrund wird in der vorliegenden Arbeit die Aussagefähigkeit der Skalierten Analogie Methode (SAM)¹, deren wesentlicher Bestandteil die Naphthalin Sublimations Methode (NSM) ist, bestimmt und deren Eignung für zukünftige Untersuchungen im Bereich der Turbomaschinen diskutiert.

¹ Anders als der Begriff „Naphthalin Sublimations Methode“ ist „Skalierte Analogie Methode“ ein bisher nur in dieser Arbeit verwendeter Ausdruck.

Ein Schwerpunkt in der Auslegung und Optimierung von Turbomaschinen sind thermodynamische Vorgänge. Neben den globalen Gesichtspunkten, wie die Dimensionierung eines Kreisprozesses, stehen Detailsysteme, wie die Kühlung bestimmter Komponenten, im Fokus der Entwicklung. Die Funktion von Kühlsystemen ist gerade bei mechanisch stark belasteten Bauteilen, die gleichzeitig hohe Temperaturen aufweisen, allen voran die rotierenden Schaufeln einer Turbine, von immenser Bedeutung. Es reicht zur Erfüllung der technischen Anforderungen nicht mehr aus, nur für eine ausreichende Kühlung zu sorgen und damit ein Bauteilversagen zu verhindern. Die Kühlung muss auch mit möglichst geringem physikalischen Aufwand erfolgen im Verhältnis zum Nutzen. Eine derartige Effizienz allgemeingültig zu definieren und im expliziten Fall zu bestimmen, gelingt nur durch Methoden der Grundlagenwissenschaft, welche zeitaufwändig und erst langfristig wirtschaftlich rentabel sind. Aus diesem Grund wird das primär verwendete Kühlkonzept für Turbinenschaufeln, die konvektive Innenkühlung mit Luft, überwiegend heuristisch weiterentwickelt. Anschließend an jeden größeren Entwicklungsschritt erfolgt rückwirkend die Erkenntnisgenerierung durch Untersuchungen in der Angewandten Forschung, unter anderem mittels der SAM. Die Effizienz der so entstandenen Kühlsysteme lässt sich dabei fast nur durch den Vergleich bestimmter Parameterwerte bei unterschiedlichen Betriebspunkten abschätzen. In der Regel werden dazu zwei technische Größen, wie die Nusselt-Zahl und der Druckverlustkoeffizient ins Verhältnis gesetzt, anschließend einem Betriebsparameter, zum Beispiel der Reynolds-Zahl, gegenübergestellt und Extremwerte gesucht. Diese Herangehensweise ist keine Bestimmung der Effizienz im eigentlichen Sinn, liefert aber für die Auslegung von Kühlungen nützliche Korrelationen. Das Verständnis der physikalischen Vorgänge, wie beispielsweise die Ursache für einen erhöhten Wärmeübergang bei veränderten Strömungsbedingungen, wird so jedoch nicht gefördert. Es wird aber zukünftig zur Entwicklung von verbesserten Kühlmethoden notwendig sein. Detaillierte Grundlagenuntersuchungen zum Beispiel zur Temperatur- und Geschwindigkeitsgrenzschicht in der jeweiligen Kühlströmung werden hierzu einen wichtigen Beitrag leisten. Allerdings kann auch die bisher verwendete SAM weiterhin hilfreich sein, zumindest wenn bestimmte Voraussetzungen gegeben sind und eine geringe Qualität der gewonnenen Aussagen akzeptiert werden kann. Dass die SAM und insbesondere die NSM eine verhältnismäßig große und bisher ungeachtete Unsicherheit birgt, zeigen bereits Untersuchungen, die dieser Arbeit unmittelbar vorangegangen sind. Insbesondere die schlechte Reproduzierbarkeit der Ergebnisse wird in [3] angesprochen und bestätigt sich bei Messungen im Rahmen des Forschungsprojekts *Einfluss der Rotation auf die Zyklon- und Prallkühlung fortschrittlicher Schaufelkühlsysteme* [4]. In der NSM scheint damit die stärkste Unsicherheit der SAM zu liegen. Deren Ursachen und Quantifizierung sowie Wichtung gegenüber der gesamten Unsicherheit der SAM sind Gegenstand dieser Arbeit. Die Aussagefähigkeit und Eignung der SAM für zukünftige Untersuchungen von Turbinenschaufelkühlungen wird jedoch nicht nur aus der Unsicherheit geschlussfolgert. Anhand der Verwendung der SAM zur Untersuchung von zwei repräsentativen Kühlmethoden mit stark unterschiedlichen Eigenschaften erfolgt die abschließende Beurteilung.

2. Stand der Forschung und Technik

Die Turbomaschine wird seit etwa einem Jahrhundert in vielfältigen Bauformen für unterschiedlichste Aufgaben eingesetzt. Häufigste Vertreter sind die stationäre Gas- sowie Dampfturbine zur Erzeugung elektrischer Energie, das Flugtriebwerk zum Antreiben von Luftfahrzeugen und der Turbolader zur Steigerung der Leistungsdichte von Hubkolbenmotoren. Üblicherweise werden sie mit einem gasförmigen Medium betrieben, in der Regel Luft beziehungsweise Wasserdampf und gegebenenfalls Brennstoff sowie Verbrennungsrückstände. Je nach primärer Führung des Gases wird die Bauform unterschieden in radiale und axiale Turbomaschinen, wobei Kombinationen nicht selten sind. In Abb. 2.1 ist beispielhaft eine stationäre Gasturbine in reiner Axialbauweise dargestellt. Allen Bauformen gemein sind drei Bauteilklassen.

Zu den kalten und heißen, nicht drehenden Bauteilen zählen beispielsweise die Gehäuse von Verdichter und Turbine sowie im Falle der stationären Gasturbine und des Flugtriebwerks auch die Brennkammer. Diese Bauteile unterliegen den geringsten mechanischen Belastungen, die in einer Turbomaschine auftreten. Thermisch werden sie teilweise aber durchaus stark beansprucht. Die Temperaturen, denen Teile der Brennkammer oder des Turbinengehäuses ausgesetzt sind, liegen knapp unterhalb der Materialschmelztemperatur oder überschreiten diese sogar. Kritisch im Sinne des Versagens der nicht drehenden Bauteile ist daher nur ein Aspekt, die thermische Beanspruchung.

Die kalten, drehenden Bauteile sind vorwiegend jene des Verdichters sowie der Wellenlagerung. Insbesondere die weit vom Drehzentrum entfernt liegenden Bauteile, wie die Verdichterlaufschaufeln, werden durch die Zentrifugalwirkung mechanisch stark beansprucht. Die auftretenden Temperaturen sind jedoch so gering, dass die ertragbaren Spannungen vieler Werkstoffe nur unwesentlich herabgesetzt werden. Kritisch im Sinne des Versagens der kalten, drehenden Bauteile ist daher auch nur ein Aspekt, die mechanische Beanspruchung.

Als heiße, drehende Bauteile lassen sich nur jene des Rotors der Turbine bezeichnen. Sie werden aufgrund der Zentrifugalwirkung sowohl mechanisch, als auch aufgrund der Temperaturen thermisch stark belastet. Kritisch für das Bauteilversagen, vor allem der weit vom Drehzentrum entfernt liegenden Turbinenlaufschaufeln, sind die geringen Materialfestigkeiten aufgrund der hohen Temperaturen. Bei Verwendung der heute wirtschaftlich verfügbaren Werkstoffe ist eine Kühlung dieser Bauteile, abgesehen von einigen der dampfgetriebenen Turbomaschine und denen des Turboladers, unerlässlich.

Bei der aktuellen Auslegung von Turbomaschinen liegt der Fokus jedoch nicht mehr allein auf dem Verhindern von Bauteilversagen. Der Gesamtwirkungsgrad der Maschine spielt eine fast ebenso wichtige Rolle, da gestiegene ökologische und wirtschaftliche

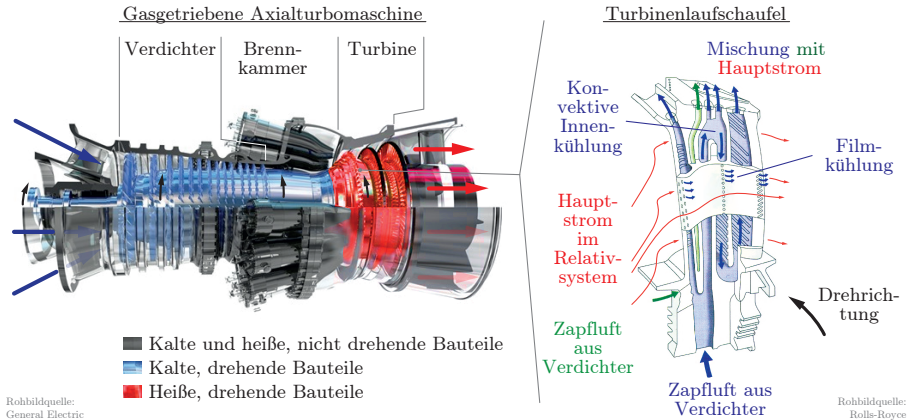


Abbildung 2.1.: Beispielhafte Darstellung einer Schaufelkühlung einer Gasturbine

Anforderungen gleichermaßen erfüllt werden müssen. In den engen Grenzen der Lu-
krativität kann eine Turbomaschine mit höherem Wirkungsgrad nicht durch die Um-
setzung neuer, grundlegender Konzepte entwickelt werden. Allein die Optimierung
möglichst vieler Komponenten der bestehenden Maschinenkonzepte ist ein praktika-
bler Weg, eine Wirkungsgradsteigerung zu erzielen. Dieses betrifft auch die Kühlung
der Turbinenschaufeln. Üblicherweise wird komprimierte Luft aus dem Verdichter, die
sogenannte Zapfluft, entnommen und durch verschiedene Methoden zur Herabset-
zung der Schaufeltemperatur verwendet. Dieses Vorgehen senkt in der Regel den Ge-
samtwirkungsgrad der Maschine im Vergleich zum technischen Idealfall, bei dem die
Zapfluft nicht zur Kühlung dem Hauptstrom entzogen wird, sondern zur Verbrennung
in diesem verbleibt. Die Optimierung der Schaufelkühlung hat daher das primäre Ziel,
ohne eine Erhöhung des Versagensrisikos der Bauteile die Menge und den Druck der
benötigten Zapfluft zu verringern. Gelingen kann dieses nur, wenn möglichst viele,
relevante Eigenschaften der Kühlung bekannt sind. Für die zwei sehr häufig und in
Kombination realisierten Arten von Kühlmethode, die konvektive Innenkühlung und
die äußere Filmkühlung, zählen vor allem der Wärmetransport und die Materialtem-
peraturverteilung zu diesen relevanten Eigenschaften. Beispielhaft ist in Abb. 2.1 eine
Turbinschaufel skizziert, deren Kühlung durch beide Methoden erreicht wird. Im
Inneren der Schaufel sorgt die Durchströmung von mäanderförmigen Kühlkanälen,
die Konvektion, für einen Abtransport von Wärme in den Hauptstrom der Turbine.
Der Austritt der Kühlluft erfolgt sowohl über Auslässe in der Schaufelspitze als auch
durch sogenannte Filmkühlbohrungen. Über Letztgenannte wird ein bewegter Isola-
tionsfilm¹ nahe der Schaufeloberfläche erzeugt und so deren Temperatur gering ge-
halten. Infolge der Wärmeaufnahme aus der Schaufel und dem Hauptstrom während
des Überströmens der Oberfläche trägt der Film auch zur Kühlung der Schaufel bei,
verliert aber seine Isolationswirkung. Die Kenntnis und idealerweise auch das Ver-

¹Grund für die Isolationswirkung ist die geringere Wärmeleitfähigkeit von Gasen bei niedrigeren Temperaturen.

ständnis des Wärmetransports, der Temperaturverteilung sowie deren Abhängigkeiten von verschiedenen Einflussgrößen, wie der Drehzahl oder der Zapflufttemperatur, sind daher zur verbesserten Umsetzung beider Kühlmethoden ausschlaggebend. Wissenschaftliche Untersuchungen mit hoher Qualität der gewonnenen Aussagen sind hierfür unumgänglich.

2.1. Skalierte Analogie Methode (SAM)

Eine direkte Untersuchung der Kühlsysteme von Turbinenschaufeln gestaltet sich äußerst schwierig. Die vergleichsweise extremen Temperaturen und Drücke innerhalb einer Turbinenlaufschaufel sowie die hohen Drehzahlen, mit der diese umläuft und die konstruktionsbedingte schlechte Zugänglichkeit verhindern den Einsatz von wissenschaftlich aussagekräftigen Messmethoden. Als wissenschaftlich aussagekräftige Messmethoden sind hier jene gemeint, die zum Beispiel die Bestimmung lokalen Wärmestromdichte und der lokalen Wandtemperatur ermöglichen. Lediglich einfachste Kontrollprüfungen mit Thermalfarben oder punktuellen Temperatursensoren sind unter diesen Bedingungen möglich. Für das Verständnis physikalischer Zusammenhänge reicht dieses Vorgehen jedoch nur selten aus. In den letzten fünf Jahrzehnten entwickelte sich daher eine alternative Methode, die Strömung und vor allem den Wärmetransport von konvektiven Schaufelinnenkühlungen zu untersuchen. Im Wesentlichen werden dabei alle Bedingungen soweit verändert, dass der Einsatz von wissenschaftlichen Messmethoden möglich wird. Essenziell ist hierbei die Skalierung der Strömung mit dem Ziel, ein größeres Beobachtungsvolumen zu erhalten als es die üblicherweise recht kleinen Schaufelkühlkanäle bieten. Bei der Skalierung wird zudem nicht nur das Temperatur- und Druckniveau stark gesenkt, sondern auch die Systemrotation. An einem so gewonnenen großen, langsam rotierenden und relativ kalten Strömungssystem lassen sich der Wärmetransport und das Geschwindigkeitsfeld wesentlich einfacher experimentell bestimmen als in der Turbinenschaufel selbst. Trotzdem bedürfen diese Vermessungen noch aufwändige Techniken, die beispielsweise eine optische Zugänglichkeit und definiert beheizte Wände erfordern. Zur Untersuchung von Strömungen in rotierenden Kanälen sind diese Techniken erst seit wenigen Jahren praktikabel. In der Vergangenheit wurde daher oft die Analogie von Wärme- und Stofftransport (WSA) ausgenutzt, um anhand des Stoffübergangs und einer Transferfunktion Rückschlüsse auf den Wärmeübergang zu ziehen. Da sich der Stoffübertrag mit der Naphthalin Sublimations Methode (NSM) auch bei Strömungen in rotierenden Kanälen recht leicht vermessen lässt, wird dieses Vorgehen bis heute verwendet. Das gesamte Vorgehen, bestehend aus Skalierung der Strömung auch im Falle von Systemrotation, Anwendung der NSM und Transfer von Stoff- in Wärmeübergang, wird im Folgenden unter dem Begriff Skalierte Analogie Methode (SAM) zusammengefasst.

Die Schwerpunkte bisheriger Veröffentlichungen betreffen nur Teile der SAM. Das gesamte Vorgehen aus Strömungsskalierung, Nutzung der NSM und Transfer von Wärme- und Stofftransport wurde bisher nicht als eine zusammenhängende Methode analysiert. Oft steht nur das Messergebnis der NSM, also der Stoffübergang in

ausgewählten, generischen Strömungskanälen im Vordergrund. Die Betrachtung der Übertragbarkeit der Ergebnisse auf die Kühlung von Turbinenschaufeln erfolgt nur in Ansätzen in [5]. Auch die Ungenauigkeit der NSM wird dort sowie in [6] nur ohne nähere Untersuchung abgeschätzt. Einige der kritischen Aspekte, die die Genauigkeit der NSM beeinflussen, werden in [7] diskutiert aber nicht in diesem Kontext quantifiziert. Zu den Gesichtspunkten zählt auch der Einfluss der Wandoberflächengestalt. Deren zeitliche Änderung ist die Messgröße der NSM. Allerdings bedingt eine Veränderung der Oberflächengestalt auch eine veränderte Geschwindigkeitsgrenzschicht und damit einen veränderten Stofftransport. Dieser, der NSM immanente Effekt wird in [3] als Ursache für die schlechte Reproduzierbarkeit der Messergebnisse vermutet.

Erst in wenigen Untersuchungen [8], [9], [10], [11] und [12] werden Ergebnisse, die mit der SAM gewonnen wurden, hinterfragt, allerdings auch nur indirekt. Die Gegenüberstellung der Resultate von Stoffübergangsmessungen mittels NSM und Wärmeübergangsmessungen an vermeintlich gleichen Strömungen in [12] zeigen selbst in Form von Korrelationen Unterschiede von bis zu 25%_{max}. Die Ursachen für diese Abweichung werden nicht detailliert diskutiert. Es wird nur geschlussfolgert, dass eine Transferfunktion, die nur für das explizit betrachtete und unskalierte Strömungssystem Gültigkeit besitzen kann, notwendig ist, um die nicht exakt zutreffende WSA trotzdem praktisch nutzen zu können. In [8] wird ein Teil der Ursache für die Abweichung von Wärme- und Stofftransport in der Temperaturabhängigkeit der Materialkoeffizienten, wie Viskosität und Massendichte, gefunden. Mit bis zu 20%_{MW} werden jedoch nur die räumlichen Variationen dieser Größen quantifiziert, nicht aber deren Auswirkungen auf die Genauigkeit der SAM. Insgesamt birgt die SAM daher Unsicherheiten, die noch nicht umfassend zu einer Ungenauigkeit quantifiziert worden sind. Ob und in welcher Form die SAM den zukünftigen Anforderungen bei der Untersuchung von konvektiven Schaufelkühlungen gerecht werden kann, ist aus bisherigen Untersuchungen nicht abschätzbar.

2.2. Naphthalin Sublimations Methode als renommierte Messmethode

Die NSM ist ein wesentlicher Teil der SAM und gilt als renommiertes Untersuchungswerkzeug für Schaufelkühlssysteme. Sie wird in mehreren Varianten praktisch umgesetzt, wobei die Grundprinzipien identisch sind. Eine gute Übersicht zur NSM wird in [6] sowie [7] angegeben. Der bei Raumbedingungen² feste, aber sublimierende Stoff Naphthalin $C_{10}H_8$ wird zur Oberflächenbeschichtung des zu untersuchenden Strömungskanals verwendet. In Abb. 2.2 ist dieser Vorgang am Beispiel eines Prallstrahls vereinfacht dargestellt. Üblicherweise wird ein Trägersubstrat wie Aluminium durch Tauchschmelzen oder Bedampfen mit Naphthalin beschichtet. Die Masse M dieser Naphthalin-Schicht nimmt durch die Sublimation in das darüber befindliche Gas, üblicherweise Luft, mit der Zeit t ab. Bewegt sich dieses Gas, das heißt es transportiert den Naphthalin-Dampf konvektiv und leitet diesen nicht nur diffusiv, erhöht sich die Mas-

²Temperatur 300 K und Druck 10^5 Pa

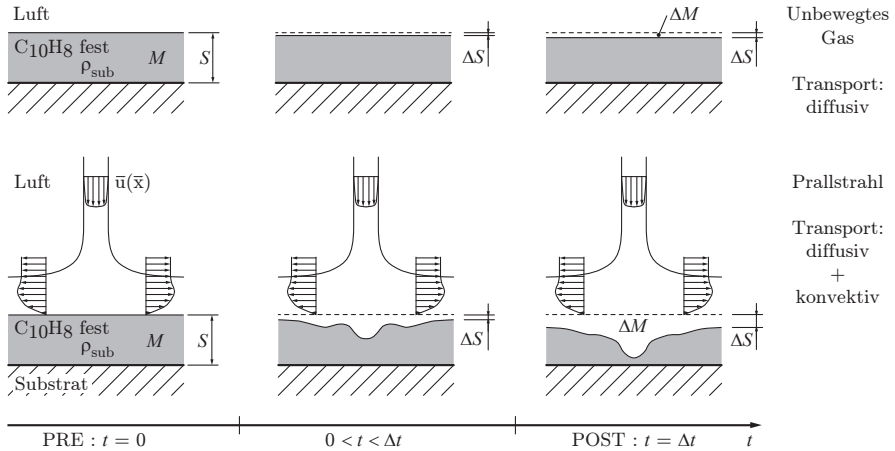


Abbildung 2.2.: Prinzipskizze zur Naphthalin Sublimations Methode bei rein diffusivem Transport und bei einem Prallstrahl

senabnahmegeschwindigkeit $\Delta M / \Delta t$. Ursache hierfür ist, dass das Feld der partiellen Massendichte des Naphthalin-Dampfs bei Konvektion größere Gradienten aufweist. Das zur Sublimation notwendige Partialdruckgefälle ist damit erhöht und mehr Masse an Naphthalin sublimiert pro Zeit. Die Massenabnahmegeschwindigkeit ist die interessierende Größe bei der NSM. Eine Möglichkeit sie zu bestimmen ist die gravimetrische Messung durch Wiegen der beschichteten Substrate zum Zeitpunkt vor (PRE) und nach (POST) dem gewünschten Sublimationsvorgang. Nachteilig an diesem Vorgehen ist die geringe räumliche Auflösung. Diese lässt sich jedoch vergrößern, wenn nicht die Masse direkt gemessen wird, sondern die örtliche Schichtdickenänderung ΔS . Sofern die Naphthalin-Schicht eine homogene Massendichte und ein homogenes Sublimationsverhalten besitzt, ist die Schichtdickenabnahmegeschwindigkeit $\Delta S / \Delta t$ direkt proportional zum flächenspezifischen sublimierenden Massenstrom \dot{m}_{sub} . Die Schichtdickenabnahmegeschwindigkeit wird üblicherweise in einem PRE-POST-Verfahren, also zeitlich sehr gering aufgelöst, ermittelt. Über ein berührendes oder nicht berührendes Messverfahren wird die Schichtdicke vor und nach dem gewünschten Sublimationsvorgang ermittelt. Eine Messung der Schichtdickenänderung während des Sublimationsvorgangs wird in [13] angewendet und liefert ein zeitlich deutlich höher aufgelöstes Ergebnis. Ausgenutzt wird hierbei, dass die Intensitätsveränderungen von monochromatischem, kohärentem Licht bei der Transmission durch die auf transluzentem Substrat aufgebrachte Naphthalin-Schicht mit der Schichtdickenänderung korreliert. Die erforderliche optische Zugänglichkeit und die Transluzenz des Substrates sind jedoch für viele Untersuchungen von Schaufelkühlkanälen, insbesondere für jene mit Systemrotation, große technische Hürden. In dieser Arbeit wird daher die am häufigsten eingesetzte Variante, die Bestimmung der Schichtdickenabnahme in einem PRE-POST-Verfahren, verwendet.

2.3. Abbildung von Wärme- und Stoffübergang

Der Transport von Wärme oder Stoff von einer Wand in ein über diese strömendes Gas wird üblicherweise aus dem Produkt einer angenommenen, treibenden Differenz und einem sogenannten Übergangskoeffizienten UK ausgedrückt. Der Übergangskoeffizient beinhaltet die Auswirkungen aller Effekte, die den Transport beeinflussen, inklusive einer möglichen Abhängigkeit zur treibenden Differenz. Er kann daher eine Funktion von vielen physikalischen Größen und technischen Parametern A, B, \dots sein. Im Falle des Wärmetransports ist die treibende Differenz ein Temperaturunterschied $T_1 - T_2$ und der Koeffizient wird Wärmeübergangskoeffizient $UK \triangleq \alpha$ genannt. Die Wärmestromdichte \dot{q}_{x_w} wird dann durch Gl. 2.1 abgebildet. Im Falle des Stofftransports der Spezies a in Spezies b ist die treibende Differenz ein Unterschied im Molanteil $x_{a,1} - x_{a,2}$ und der Koeffizient wird Stoffübergangskoeffizient $UK \triangleq \beta_{ab}$ genannt. Der flächenspezifische Stoffstrom der Spezies a in Spezies b wird durch j_{ba,x_w}^* gekennzeichnet und durch Gl. 2.2 abgebildet. Er kann beispielsweise mit der NSM aus dem flächenspezifischen, sublimierenden Massenstrom $\dot{m}_{\text{sub}} \triangleq \dot{m}_a$ bestimmt werden. Wie in Kap. 4.1.2 gezeigt wird, entsprechen sich der Stofftransport von Spezies a in Spezies b und jener von Spezies b in Spezies a sofern bestimmte Bedingungen erfüllt sind. Dann besteht zwischen der Abbildung von Wärme- und Stofftransport formal kein Unterschied.

$$\dot{q}_{x_w} \quad \text{---} \bullet \quad \alpha(A, B, \dots) [T_1 - T_2] \quad (2.1)$$

$$j_{ab,x_w}^* = \dot{m}_a \quad \text{---} \bullet \quad \beta(A, B, \dots)_{ab} [x_{a,1} - x_{a,2}] \rho \quad (2.2)$$

$$j_{ba,x_w}^* = \dot{m}_b \quad \text{---} \bullet \quad \beta(A, B, \dots)_{ba} [x_{b,1} - x_{b,2}] \rho \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \beta(A, B, \dots)_{ab} [x_{a,1} - x_{a,2}] &= \beta(A, B, \dots)_{ab} [x_{b,2} - x_{b,1}] \\ \beta(A, B, \dots)_{ba} [x_{b,1} - x_{b,2}] &= \beta(A, B, \dots)_{ba} [x_{a,2} - x_{a,1}] \\ \Rightarrow \beta(A, B, \dots)_{ab} &= \beta(A, B, \dots)_{ba} \end{aligned}$$

Diese Abbildungen sind gut geeignet für die Auslegung von Wärmeübertragern beziehungsweise Stoffübertragern (WS-Übertragern). Sie eignen sich jedoch nicht zum Vergleich konvektiver Kühlmethode oder konvektiver Stofftransportmethoden, da in den jeweiligen Fällen die tatsächlich treibenden Differenzen von den angenommenen Differenzen abweichen können. Eine unbemerkt verzerrte Einschätzung des tatsächlichen Transports wäre die Folge. Für den aussagekräftigen Vergleich muss die mathematische Abbildung des WS-Übergangs von den treibenden Differenzen unabhängig sein. Dieses gelingt durch die Definition einer jeweiligen Übergangszahl UZ gemäß [14], welche im Falle der Wärmeübertragung Nusselt-Zahl Nu und im Falle der Stoffübertragung Sherwood-Zahl Sh genannt wird. Sie setzt gemäß Gl. 2.4 und Gl. 2.5 den WS-Übertrag direkt an einer diabaten Wand $x_w = 0$ bei vorliegender Konvektion (Index $d. + k.$) ins Verhältnis zum theoretischen WS-Übertrag durch reine Diffusion

(Index $d.$) bei selben treibenden Differenzen und selber Diffusionsstrecke.

$$UZ = \frac{\dot{f}\big|_{0,d.+k.}}{\dot{f}\big|_{0,d.}} \cong \frac{DK\big|_{0,d.+k.} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_w}\big|_{0,d.+k.}}{DK\big|_{0,d.} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_w}\big|_{0,d.}} \quad (2.4)$$

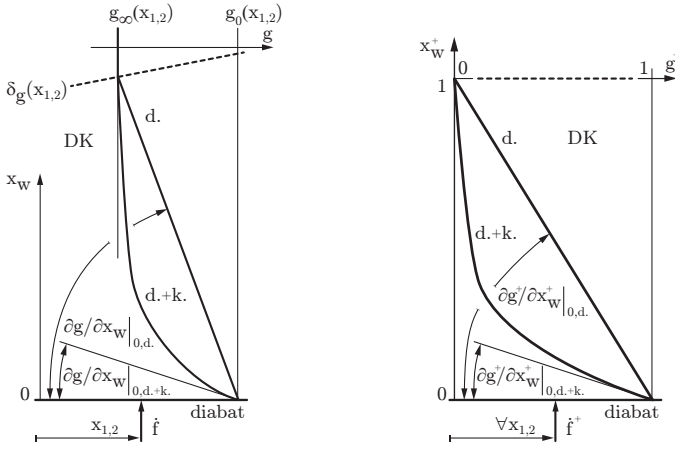
$$UZ = \frac{\frac{\partial g}{\partial x_w}\big|_{0,d.+k.}}{\frac{g_0 - g_\infty}{\delta_g}} \quad \forall \quad \frac{\partial DK}{\partial x_w} = 0 \quad (2.5)$$

Grundlage hierfür ist das eindimensionale Diffusionsgesetz Gl. 2.6, welches den Fluss einer Größe f durch den Gradienten einer Größe g und einem Diffusionskoeffizienten DK beschreibt. In Kap. 4.1.2 wird das Diffusionsgesetz für die Leitung von Wärme als vereinfachtes Fourier'sches Gesetz hergeleitet.

$$\dot{f}(x_w, x_1, x_2) = DK(x_w, x_1, x_2) \cdot \frac{\partial g(x_w, x_1, x_2)}{\partial x_w} \quad (2.6)$$

Hierbei ist der Diffusionskoeffizient die Wärmeleitfähigkeit $DK \cong \lambda$, die treibende Größe die Temperatur T und der Fluss die Wärmestromdichte \dot{q} . Für die Leitung von Stoff entspricht das vereinfachte Fick'sche Gesetz dem Diffusionsgesetz, wobei der Diffusionskoeffizient dem molaren Diffusionskoeffizienten $DK \cong D_{ab}$, die treibende Größe dem Molanteil x_a und der Fluss dem flächenspezifischen Stoffstrom j_{ab,x_w}^* entspricht.

Die Übergangszahl ist aussagekräftig, wenn der Diffusionskoeffizient an der Wand im Falle reiner Diffusion jenem entspricht, der bei Konvektion vorliegt. Dieses ist gegeben, wenn der Diffusionskoeffizient nur von der treibenden Größe abhängt $DK = DK(g)$ und nicht von weiteren Größen wie beispielsweise dem Geschwindigkeitsgradienten. Nutzbar ist diese Definition jedoch nur bei Kenntnis des Gradienten der treibenden Größe an der Wand, welche die eigentlich gesuchte Information darstellt. Daher wird vereinfachend angenommen, dass der Diffusionskoeffizient zumindest in Leitungsrichtung x_w konstant ist $\partial DK / \partial x_w = 0 \Rightarrow DK \neq DK(g)$. Im rein diffusiv transportierenden System ist der räumliche Verlauf der treibenden Größe dann linear, wie in Abb. 2.3a dargestellt. Durch Konvektion verändert sich dieser Verlauf und beeinflusst so den übertragenen Fluss \dot{f} . Die Übergangszahl vereinfacht sich dann zu Gl. 2.5, lässt jedoch immer noch keinen aussagekräftigen Vergleich verschiedener Kühl- oder Stoffübertragungsmethoden zu. Bei unterschiedlichen Übertragungsmethoden variieren sowohl die treibenden Größen an der Wand g_0 als auch die Dicken der Grenzschicht δ_g räumlich unterschiedlich. Daher wird die Übergangszahl auf die örtlich vorliegenden treibenden Größen und Grenzschichtdicken bezogen und so in die aussagekräftige Form Gl. 2.7 gebracht. Mit Ausnahme der Gradienten liegen die Werte aller Größen im Bereich von Null bis Eins wie in Abb. 2.3b dargestellt. Die Gradienten und die Übergangszahlen verschiedener Übertragungsmethoden sind daher aussagekräftig und direkt vergleichbar. In dieser Form wird die jeweilige Übergangszahl im Folgenden als



(a) Absolute treibende Grenzschicht

(b) Dimensionslose treibende Grenzschicht

Abbildung 2.3.: Eindimensionaler diffusiver (d.) und diffusiv, konvektiver (d.+k.) Transport der Größe f durch das Potential der Größe g in orthogonaler Richtung x_w zur diabaten Wand bei $x_w = 0$

übertragbar definierte Übergangszahl bezeichnet.

$$UZ = \left. \frac{\partial g^+}{\partial x_w^+} \right|_{0,d.+k.} \quad \text{mit} \quad g^+ = \frac{g - g_\infty}{g_0 - g_\infty} \quad \wedge \quad x_w^+ = \frac{x_w}{\delta_g} \quad (2.7)$$

Um diese übertragbar definierte Übergangszahl experimentell zu bestimmen, müssen die Grenzschichten der treibenden Größe vollständig vermessen werden und gleichzeitig sichergestellt sein, dass die Diffusionskoeffizienten in Leitungsrichtung hinreichend konstant sind. Dieser Aufwand ist für viele technische Untersuchungen nicht gerechtfertigt, insbesondere dann nicht, wenn nur Korrelationen zur späteren Berechnung des WS-Übergangs gesucht sind.

$$UZ = \frac{UK \cdot [g_1 - g_2]}{DK \cdot \frac{g_0 - g_\infty}{\delta_g}} \quad (2.8)$$

$$= \frac{UK}{DK} \cdot \delta_g \quad \forall \quad g_1 = g_0 \quad \wedge \quad g_2 = g_\infty \quad (2.9)$$

$$UZ \circ \bullet \frac{UK}{DK} \cdot L_{char} \quad \forall \quad \delta_g = \delta_g(L_{char}) \quad (2.10)$$

Daher wird üblicherweise, so auch bei der SAM, eine Mischform aus übertragbar definierter Übergangszahl und Übergangskoeffizient verwendet. Mit dieser nach Gl. 2.8 definierten Übergangszahl lassen sich dann Korrelationen zur korrekten Berechnung des WS-Übergangs bilden, ohne jedoch die Grenzschichten der treibenden Größen und den jeweiligen Diffusionskoeffizienten kennen zu müssen. Der direkte Vergleich

dieser Korrelationen zum WS-Übergang in verschiedenen WS-Übertragern ist jedoch nur selten aussagekräftig, da meistens die jeweiligen Randbedingungen, die jeweiligen Gültigkeitsbereiche und die jeweiligen Bezugsgrößen, g_1, g_2, g_0, g_∞ , der Korrelationen unterschiedlich sind. Aussagekräftig ist nur der Vergleich des mittels der jeweiligen Korrelation errechneten WS-Übertrag bei expliziten Werten für die jeweiligen Randbedingungen und Bezugsgrößen. Für die Auslegung von WS-Übertragern ist dieses Vorgehen hilfreich, für den allgemeingültigen aussagekräftigen Vergleich von WS-Übertragern allerdings nicht. Dieser allgemeingültige Vergleich ist jedoch Ziel der meisten wissenschaftlichen Untersuchungen bei der die SAM verwendet wird.

In einigen Fällen, wenn die angenommene treibende Differenz $g_1 - g_2$ der tatsächlichen $g_0 - g_\infty$ entspricht, geht die Übergangszahl nach Gl. 2.8 in die einfachere Form Gl. 2.9 über. Beispielsweise ist dieses bei der Wärmeübertragung von einer isothermen Wand $dT_0 = 0$ an eine Strömung mit Temperaturgrenzschicht, also mit einer konstanten Fernfeldtemperatur T_∞ gegeben. Die Korrelationen zum WS-Übergang in verschiedene WS-Übertrager, deren jeweiliger WS-Übergang diese Eigenschaft aufweist, lassen sich untereinander allgemeingültig vergleichen. Problematisch sind Strömungen, deren treibende Größe im Fernfeld g_∞ oder an der Wand g_0 zum Beispiel durch Rezirkulationsgebiete örtlich unterschiedlich ist. Diese Änderungen müssen mitbestimmt werden, wenn ein allgemeingültiger aussagekräftiger Vergleich mit anderen Strömung durchgeführt werden soll, die diese Rezirkulation nicht aufweisen. Eine postulierte Berechnung der sich ändernden Fernfeldgröße, wie in [15] für die partielle Massendichte von Naphthalin im Fernfeld einer Kanalströmung durch eine homogene Mischung angewendet, verzerrt die Übergangszahl nicht nachvollziehbar und stellt daher keine Alternative dar. Weiterhin ist die experimentelle Vermessung der Grenzschicht zur Berechnung einer lokalen Grenzschichtdicke δ_g nur selten³ möglich. Als Näherung wird daher eine konstante Länge L eingesetzt, welche in der Regel deutlich größer ist als die Grenzschichtdicke⁴. Dieses verzerrt das Niveau der Übergangszahl und deren räumliche Verteilung auf der Wand extrem. Die Übergangszahl ist dann nur noch für den Vergleich von Übertragungsmethoden aussagekräftig, bei denen die Grenzschichtdicken, deren Verteilungen auf den Wänden und die Länge L gleich sind. Für Variationsuntersuchungen der Reynolds-Zahl, die üblicherweise unterschiedliche Grenzschichtdicken hervorruft, ist die Übergangszahl nach Gl. 2.10 daher nur sinnvoll, wenn ausschließlich eine Korrelation zur späteren Berechnung des WS-Übergangs gesucht ist. Als Näherung kann diese Übergangszahl jedoch zum Vergleich zweier Übertragungsmethoden verwendet werden. Die Ungenauigkeit dieses Vergleichs ist dann der örtliche relative Unterschied der Grenzschichtdicken.

Ein Beispiel für die Größenordnung dieser Ungenauigkeit liefert die Theorie für die

³Um die Grenzschicht in technisch relevanten Strömungen vermessen zu können, müssten diese System meist stark skaliert werden, was zu sehr großen und damit nur in Ausnahmefällen realisierbaren Experimentaufbauten führen würde.

⁴Auch wenn das Grenzschichtprofil in der Regel asymptotisch ist, also die Grenzschichtdicke von der Definition abhängt, wird in den meisten Fällen nur der wandnahe Bereich maßgeblich für den WS-Übergang sein. Die Dicke dieses wandnahen Bereichs, der hier als Grenzschichtdicke angesehen wird, ist in der Regel deutlich kleiner als die konstante Länge L .

überströmte ebene Platte nach [16]. Die Dicke der Geschwindigkeitsgrenzschicht an einem Ort x ist hierbei proportional zur Wurzel aus dem Verhältnis vom Ort x zur Fernfeldgeschwindigkeit w_∞ .

$$\delta_w \sim \sqrt{\frac{x}{w_\infty}}$$

Bei einer Prandtl-Zahl von Eins $Pr = 1$, was näherungsweise für Gase angenommen werden kann, ist die Temperaturgrenzschichtdicke δ_T gleich der Geschwindigkeitsgrenzschichtdicke δ_w und damit ebenfalls in derselben Form von der Fernfeldgeschwindigkeit abhängig. Bei einer Kanalströmung mit ebenen Wänden ist die Grenzschichtentwicklung ähnlich wie bei der ebenen Platte (siehe [16]). Allerdings wird die Reynolds-Zahl bei Kanalströmungen oft mit einer festen Länge L definiert und nicht mit der Geschwindigkeitsgrenzschichtdicke δ_w oder der Wandkoordinate x . Verdoppelt sich diese Reynolds-Zahl durch Verdoppelung der Fernfeldgeschwindigkeit, so wird die Temperaturgrenzschichtdicke um etwa $1 - \delta_T(2 \cdot w_\infty) / \delta_T(w_\infty) \approx 30\%$ kleiner. Der direkte Vergleich der Nusselt-Zahl-Korrelationen von ebener Platte und Kanalströmung birgt daher eine Ungenauigkeit von 30%, wenn die jeweiligen Nusselt-Zahlen nach Gl. 2.10 definiert werden und im Fall der ebenen Platte als charakteristische Länge die mit der Grenzschichtdicke korrelierende Wandkoordinate verwendet wird. Eine ähnliche Unsicherheit wird beim Vergleich so definierter Sherwood-Zahlen zu erwarten sein.

Jedoch selbst wenn nur eine Nusselt-Zahl-Korrelation zur späteren Berechnung des Wärmeübergangs oder der Wandtemperatur gesucht wird, muss diese Korrelation eine hinreichende Genauigkeit besitzen. Eine Abschätzung dieser notwendigen Genauigkeit liefert die konvektive Kühlung einer Turbinenschaufel, deren Material bis an die Lebensdauergrenztemperatur belastet wird. Wird diese Grenztemperatur um 10 K überschritten, sinkt die Lebensdauer etwa um 50%, was in der Regel inakzeptabel ist. Eine Nusselt-Zahl-Korrelation sollte daher die Wandtemperatur auf 10 K genau vorhersagen können. Viele Korrelationen nutzen die logarithmische Temperaturdifferenz

$$\Delta T_m = \frac{T_A - T_E}{\ln \left(\frac{T_w - T_E}{T_w - T_A} \right)}$$

als treibende Temperaturdifferenz. Hierin ist T_E die gemittelte Eintrittstemperatur, T_A die gemittelte Austrittstemperatur und T_w die gemittelte Wandtemperatur. Die gemittelte Wärmestromdichte \dot{q}_m lässt sich dann ausdrücken durch

$$\dot{q}_m = \alpha \Delta T_m = \frac{Nu_m \lambda}{L_{char}} \Delta T_m = u \rho c_p [T_A - T_E] \frac{A_\bullet}{A_o}$$

wobei oft nur die Nusselt-Zahl Nu_m , die Temperaturen T_w und T_A sowie die Durchströmgeschwindigkeit u bei der Verwendung der Korrelation interessierende Varia-

blen sind. Somit folgt nach Umstellen der Ausdruck

$$\frac{Nu_m}{\ln\left(\frac{T_w - T_E}{T_w - T_A}\right) \cdot u} = \text{konstant} \Rightarrow \frac{Nu_m \Big|_{T_{A1}, T_{w1}, u_1}}{Nu_m \Big|_{T_{A2}, T_{w2}, u_2}} = \frac{\ln\left(\frac{T_{w1} - T_E}{T_{w1} - T_{A1}}\right) \cdot u_1}{\ln\left(\frac{T_{w2} - T_E}{T_{w2} - T_{A2}}\right) \cdot u_2}$$

aus dem sich die benötigte Genauigkeit der Korrelation von Nu_m exemplarisch berechnen lässt. Dazu wird angenommen, dass die Austrittstemperatur T_A und die Durchströmgeschwindigkeit u stets genau reproduzierbar sind.

$$T_A \stackrel{!}{=} T_{A1} \stackrel{!}{=} T_{A2} \quad \wedge \quad u \stackrel{!}{=} u_1 \stackrel{!}{=} u_2$$

Nur die Wandtemperatur T_w soll die Ungenauigkeit von 10 K aufweisen. Für repräsentative Temperaturen einer Turbinenschaufelkühlung, $T_E \hat{=} 600 \text{ K}$, $T_A \hat{=} 800 \text{ K}$, $T_{w1} \hat{=} 1.000 \text{ K}$ und $T_{w2} \hat{=} 1.010 \text{ K}$ folgt,

$$\frac{Nu_m \Big|_{T_{A1}, T_{w1}, u_1}}{Nu_m \Big|_{T_{A2}, T_{w2}, u_2}} \hat{=} 103,6\%$$

sodass die Nussel-Zahl-Korrelation eine Genauigkeit von 3,6% aufweisen muss, um mit ihr die Wandtemperatur auf 10 K genau zu berechnen.

2.4. Untersuchungen zu konvektiven Kühlmethoden von Turbinenschaufeln

Zur gesamten Bandbreite der konvektiven Kühlmethoden, welche in Turbinenschaufeln eingesetzt werden, gibt es sehr viele Publikationen. Deren Darstellung ist hier nicht zielführend, da sich die primären Aussagen auf die jeweilige Kühlung sowie deren Eigenschaften beziehen und nicht auf die Einschränkungen und Ungenauigkeiten der Methoden, mit denen diese Erkenntnisse gewonnen wurden. Entscheidend sind nur die Untersuchungen von Kühlmethoden mit extremen Eigenschaften, wie eine stark ausgeprägte oder vernachlässigbare Sensitivität gegenüber Systemrotation, das heißt gegenüber der Turbomaschinen immanenten Drehung. Diese Fälle sind repräsentativ für die Abschätzung, ob sich die SAM für zukünftige Untersuchungen eignet. Generell zählen hierzu alle konvektiven Kühlmethoden, die in rotierenden Schaufeln eingesetzt werden können und deren Geschwindigkeitsfelder möglichst stark unterschiedlich sind. Da solche Kühlungen fast ausschließlich mit der NSM untersucht wurden, gelten die nachfolgenden Aussagen nur für den Stoffübergang und nicht zwangsläufig für den Wärmeübergang. In der gesamten Arbeit werden aber allgemein die Begriffe WS-Übergang und WS-Transport verwendet, wenn Aussagen sowohl für den Wärmeübergang und -transport und für den Stoffübergang und -transport gelten.

In [5] werden zwei offensichtlich extrem gegensätzliche Fälle, die Kühlung durch eine axiale Rohrströmung und eine Prallkühlung mit der NSM untersucht. Der Rotationseinfluss wird aber nur bei der Rohrströmung⁵ mit einbezogen und dort als signifikant für den Stoffübergang festgestellt. Lokale Veränderungen der Sherwood-Zahl von über 50% aufgrund rotationsbedingter Strömungsphänomene zeigen, dass die axiale Rohrströmung messbar sensitiv gegenüber der Systemrotation ist. Andere Parameter, wie die Reynolds-Zahl Re , verändern das Niveau des Stoffübergangs zwar deutlich stärker, etwa $600\%_{Re.min}$ ⁶, fördern den Rotationseinfluss aber nur indirekt über das Anfauchen der Strömungsphänomene. Auch das Niveau des Stoffübergangs bei einer Prallkühlung, so zeigen [5], [17], [18] und [19], ist stark von der Reynolds-Zahl abhängig. Auch hier bewirkt die Systemrotation nach [19], ähnlich wie bei der Rohrströmung, nur lokale Veränderungen des Stoffübergangs. Bei bestimmten Parameterkonfigurationen, in diesem Fall dem Anstellwinkel⁷ $\alpha = 90^\circ$, erreicht diese Veränderung etwa $100\%_{Ro=0}$. Damit scheint eine Prallkühlung sensitiver gegenüber rotationsbedingten Strömungsphänomenen als die Kühlung durch eine axiale Rohrströmung. Auch andere Kühlmethode, wie die Verwendung eines berippten Vierkantkanals, zeigen eine geringere Rotationssensitivität. Nach [20] und [15] treten hierbei rotationsbedingte, lokale Veränderungen im Stoffübergang von maximal 60% auf. Daher wird eine Prallkühlung als ein Validierungsfall für die SAM verwendet. Anhand der Erkenntnisse, die mit der SAM aus den zu erwartenden, starken Effekten im Stoffübergang geschlossen werden können, wird die Eignung der SAM für zukünftige Untersuchungen ermittelt. Ein zweiter, vollständig konträrer Fall ohne signifikanten Rotationseinfluss stellt die Zyklonkühlung dar. Nach [3] sind lokale Veränderungen des Stoffübergangs aufgrund rotationsbedingter Strömungsphänomene fast nicht feststellbar. Die Variation liegt etwa im Bereich von $\pm 5\%$ und damit in der selben Größenordnung wie die erwartete Messungenauigkeit. Wegen ihrer geringen Sensitivität gegenüber der Rotation und den damit verbundenen geringen Effekten im Stoffübergang wird die Zyklonkühlung als zweiter Validierungsfall für die SAM herangezogen. Anhand dieses Falls werden die praktischen Grenzen der SAM und insbesondere der NSM ermittelt.

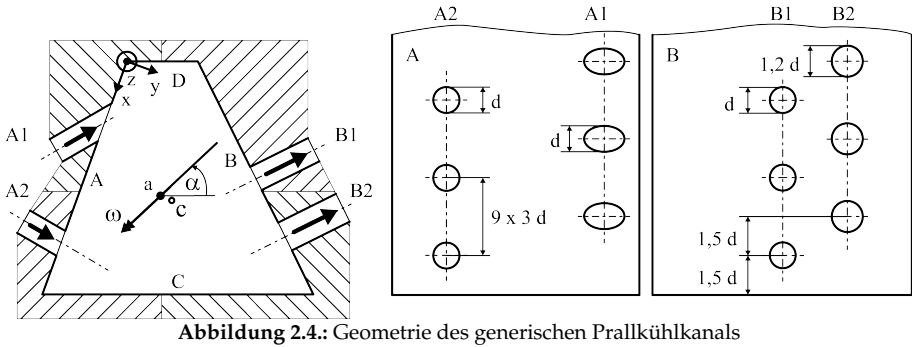
2.5. Prallkühlung

Die hier verwendete Kanalgeometrie der Prallkühlung ist in Abb. 2.4 skizziert und ihre quantitativen Eigenschaften nach der Skalierung in Tab. A.2 angegeben. Sie stellt eine generische Abbildung einer Prallkühlung innerhalb der Schaufel einer stationären Gasturbine dar, welche wiederum auf dem Patent [21] basiert. Der Hauptmechanismus zur Generierung eines hohen WS-Übergangs liegt in den großen, wandnahen Geschwindigkeitsgradienten infolge des Auftreffens von Freistrahlen auf die Wände. Die Freistrahlen werden durch die Durchströmung der Bohrungen A1 und A2 erzeugt

⁵Die Rohrlängsachse ist dabei orthogonal zur Drehachse ausgerichtet und schneidet diese.

⁶Der Index $Re.min$ gibt an, dass sich die prozentuale Änderung auf den Wert bei minimaler Reynolds-Zahl bezieht.

⁷Der Anstellwinkel ist hier der radial projizierte Winkel zwischen der Rotationsachse und der Achse der Bohrungen mit denen die Prallstrahlen erzeugt werden



und bewirken im Auftreffbereich auf den Wänden C und D einen lokal erhöhten WS-Übergang. Über die Bohrungen B1 und B2 wird das Fluid aus dem Kanal abgeführt. Von allen vier Bohrungen sind jeweils 9 in einer Bohrungsreihe über die Kanalhöhe z so angeordnet, dass die Bohrungen benachbarter Reihen einen Abstand in Höhenrichtung von einem halben Bohrungsabstand aufweisen. Im generischen Modell nicht enthalten sind Bohrungen in der Wand C, welche in der Turbinenschaufel zur Filmkühlung aber existieren. Der Einfluss dieser Filmkühlung wird nur pauschal durch Luftentnahme am oberen Kanalende ($z = z_{\max}$) simuliert. Der Kanal ist in den Untersuchungen mit Rotation so angeordnet, dass die radiale Richtung (\vec{x} gemäß Abb. 4.2) über die gesamte Kanallänge durch den Anstellpunkt a führt. Dieser liegt nahe dem Flächenschwerpunkt c des Kanalquerschnitts. Weiterhin wird durch Variation des Anstellwinkels α , also der projizierten Ausrichtung des Kanals zur Rotationsachse ω , der Rotationseinfluss auf den Übergang ähnlich wie in [19] verändert. Das generische Modell ist um den Faktor $SF = 7$ geometrisch konstant größer als der Kühlkanal in der Turbinenschaufel. Der radiale Abstand vom Kanalboden bis zur Drehachse, im Weiteren auch Drehradius x_0 genannt, beträgt $x_0 \hat{=} 261 \text{ mm} \hat{=} 18,64 d$. Der Wärmeübergang von den Wänden dieses generischen Kanalmodells an die Strömung wurde bereits durch [22] untersucht, allerdings nur für den Fall ohne Systemrotation und bei einem Skalierungsfaktor von $SF = 6$ sowie bei nur 7 Bohrungen pro Reihe. Die Ergebnisse dürften jedoch durchaus übertragbar sein, da die ermittelte Verteilung der Nusselt-Zahl Nu , welche den Wärmeübergang charakterisiert, über die Kanalhöhe entsprechend der Bohrungsanordnung periodisch ist. Für eine Reynolds-Zahl von $Re = 45.000$ zeigt sich eine lokale Überhöhung der Nusselt-Zahl in den Auftreffgebieten von etwa 300% in Relation zu den geringsten Werten, welche zwischen den Bohrungen auf Wand A auftreten. Diese starke Überhöhung muss auch mit der SAM quantifizierbar oder zumindest dedektierbar sein, um beispielsweise den Einfluss der Systemrotation auf diese Überhöhung mit ausreichender Sicherheit zu bestimmen. Zur Validierung der SAM wird daher die Reynolds-Zahl bis maximal $Re = 40.000$ variiert.

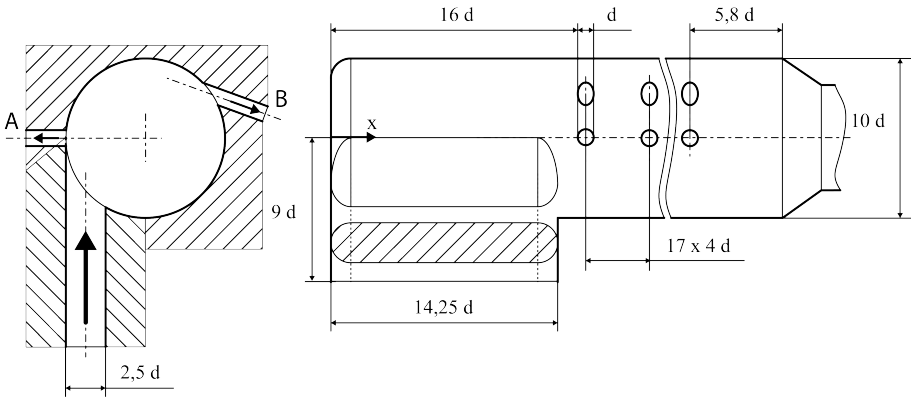


Abbildung 2.5.: Geometrie des generischen Zyklonkühlkanals

2.6. Zyklonkühlung

Als Zyklonkühlkanal wird die in Abb. 2.5 skizzierte Geometrie verwendet. Ihre quantitativen Eigenschaften nach der Skalierung sind in Tab. A.1 angegeben. Die Geometrie stellt eine generische Abbildung einer bisher nicht für Turbinenschaufel verwendeten Kühlmethode dar und lehnt an das Patent [23] an. Der gewünschte hohe WS-Übergang wird durch große wandnahe Geschwindigkeitsgradienten generiert, welche durch eine konstant anhaltende Krümmung der Strömung möglichst weit in Strömungsrichtung aufrecht erhalten werden. Um dieses zu erreichen, tritt Fluid tangential durch einen Schlitz, dem sogenannten Drallerzeuger, in den Kühlkanal nahe dem Boden ($x = 0$) ein. Die Abfuhr des Fluids erfolgt entweder am Kanallende über einen leicht verjüngten Auslass oder durch die Filmkühlbohrungen A und B. Für die Untersuchungen unter Systemrotation ist der Zyklonkanal so platziert, dass die Rohrlängsachse x radial nach außen zeigt und die Einstromung durch den Drallerzeugerschlit in Projektion senkrecht zur Drehachse erfolgt. Der radiale Abstand vom Kanalboden ($x = 0$) bis zur Drehachse beträgt $x_0 \hat{=} 273 \text{ mm} \hat{=} 5,46 d$. Durch einen Drallerzeugerschlit entsteht nach [3] ein Strahl, der durch die Wand des kreisrohrförmigen Kanals helixartig um die Längsrichtung x umgelenkt wird und im Mittel eine verdrehte Strömung darstellt. Im Vergleich zur rein axialen Durchströmung eines Kreisrohres erhöht dieser Drall, laut [24], je nach Intensität und Reynolds-Zahl den Stoffübergang bis etwa 500%, zumindest im anfänglichen Rohrbereich $x \in [0; 5d]$. Bis zum Fluidauslass bei $x = 20 d$ reduziert sich die Überhöhung auf 200%, unabhängig von der anfänglichen Drallstärke und bei einer Reynolds-Zahl⁸ von $Re = 20.000$. Den axialen Verlauf und die Stärke der Überhöhung zeigt auch die in [25] angegebene Korrelation bezüglich der Nusselt-Zahl. Die Wirkung des Dralls ist derart stark und über die Rohrlänge nahezu konstant, sodass rotationsbedingte Sekundärströmungen nach [3] keine eindeutig zuweisbaren Veränderungen der Sherwood-Zahl-Verteilung an den Wänden hervorrufen. Eine Schwächung des Dralls wird laut [1] allerdings durch die Fluidabnah-

⁸Als charakteristische Länge wird der Rohrdurchmesser verwendet

me per Filmkühlbohrungen hervorgerufen. Direkt an den Filmkühlbohrungen erhöht sich die Tangentialgeschwindigkeit zwar geringfügig, über die Rohrlänge nimmt sie jedoch stark ab und erreicht am Rohrende $x = 13 d$ bei einer Filmkühlabnahme von 100% nur noch 10% des anfänglichen Wertes. Die Verteilung des WS-Übergangs an den Kanalwänden bei einer Strömung mit lokal derart geringem Drall könnte durch Systemrotation messbar beeinflusst werden. Allerdings ist eine direkte Übertragung der Effekte, wie sie in [5] und [3] bei dem rein axial druchströmten Rohr beschrieben werden, durch die gänzlich andere Strömungsform nicht zu erwarten. Die beobachtete lokale Überhöhung des Stoffübergangs von 50% durch rotationsbedingte Sekundärströmungen dürfte bei der Zyklonkühlung selbst mit 100% Filmkühlabnahme und hoher Reynolds-Zahl wesentlich geringer ausfallen. Grund hierfür ist der vergleichsweise kürzerer Rohrabschnitt, der eine annähernde Axialströmung ohne ausgeprägten Drall aufweisen wird. Zur Validierung der SAM wird daher ein vergleichsweise hohes Reynolds-Zahl-Niveau im Bereich $Re \in [45.000; 100.000]$ verwendet und die Filmkühlabnahme nach Gl. 5.16 im Bereich $FKA \in [0; 1]$ variiert.

2.7. Fazit zum Stand der Forschung und Technik

Die Unsicherheit der SAM, insbesondere der NSM, zur Untersuchung von konvektiven Schaufelinnenkühlungen ist ungeklärt. Es gibt jedoch Anzeichen, dass diese in einer Größenordnung liegt, die größer ist, als die durch variierte Systemrotation hervorgerufenen Unterschiede im WS-Übergang bei der Zyklonkühlung. Für die aussagekräftige Untersuchung der Zyklonkühlung könnte die SAM daher ungeeignet sein. Für die Prallkühlung hingegen könnte sie aufgrund der vergleichsweise großen Gradienten der Übergangszahl-Wandverteilung ausreichend genau sein. Viele mögliche Ursachen für eventuelle Anteile an der Unsicherheit der SAM sind bekannt aber nur wenige quantifiziert. Drei scheinen jedoch am schwerwiegendsten zu sein.

Die WSA könnte in vielen Experimenten nicht exakt gegeben sein, wodurch die in [12] beobachteten Abweichungen zwischen Wärme- und Stoffübergangsverteilung von 25% begründet würden.

Die Übertragbarkeit der im skalierten, kalten, stoffübertragenden System gewonnenen Ergebnisse auf die Schaufelkühlung könnte, wie ansatzweise in [8] gezeigt, durch andere räumliche Verteilung der Materialkoeffizienten und die Skalierung selbst deutlich eingeschränkt sein.

Die NSM könnte eine deutlich größere Ungenauigkeit besitzen als bisher angenommen, wie die in [3] beobachtete schlechte Reproduzierbarkeit vermuten lässt.

3. Vorgehen

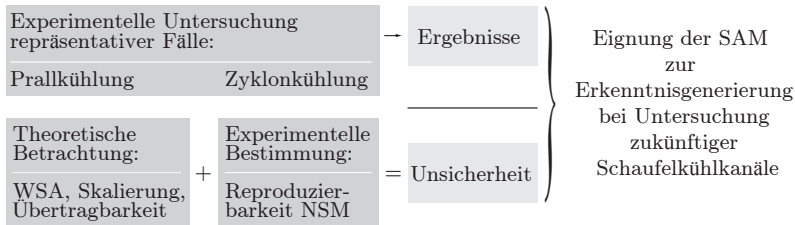


Abbildung 3.1.: Vorgehen zur Eignungsbestimmung der SAM

Das Ziel dieser Arbeit, die Eignung der SAM zu bestimmen, erfolgt über den Vergleich der Unsicherheit der SAM mit Messergebnissen, die mit der SAM gewonnen. Zunächst werden die Unsicherheit der SAM ermittelt und deren Ursachen diskutiert. Die Quantifizierung der Unsicherheit erfolgt teilweise durch rein theoretische Überlegungen zur WSA, zur Skalierung und zur Übertragbarkeit der experimentellen Ergebnisse, welche in Kap. 4 erörtert werden. Einen weiteren Anteil an der Unsicherheit liefert die Ungenauigkeit der NSM, die vor allem durch deren Reproduzierbarkeit determiniert wird. Ihre Bestimmung erfolgt experimentell und wird in Kap. 5.1 dargelegt. Die so gewonnene Unsicherheit der SAM relativiert die in Kap. 5.2 und Kap. 5.3 dargestellten Untersuchungsergebnisse zur Prall- und zur Zyklonkühlung. Aus diesem Vergleich wird in Kap. 6 die Eignung der SAM und deren Einschränkungen aufgezeigt.

3.1. Experimentelles Vorgehen

Zur Gewinnung der experimentellen Ergebnisse werden drei Verfahren eingesetzt.

- Die Reproduzierbarkeit der NSM wird mittels Doppelproben-Sublimations-Experiment und Auflichtmikroskopie untersucht. Zur Vermessung der Naphthalin-Schicht wird dabei die optische Oberflächenvermessung auf Basis der Laser-Trigonometrie eingesetzt. Die Erzeugung der Naphthalin-Schicht erfolgt durch Tauchschmelzen, wobei entweder eine unbehandelte oder eine entgaste Naphthalin-Schmelze¹ verwendet wird. Eine detaillierte Beschreibung findet sich in [26].
- Die Untersuchung mit Parametervariation der Zyklon- und der Prallkühlung wird am später beschriebenen Rotationsprüfstand durchgeführt. Auch hierbei erfolgt die Vermessung der Naphthalin-Schicht optisch auf Basis der Laser-Trigonometrie.
- Die Vermessung der Geschwindigkeitsfelder der Zyklon- und der Prallkühlung wird mittels Magnetic Resonance Velocimetry (MRV) durchgeführt, allerdings nur für den Fall ohne Systemrotation.

¹Lieferant: MERCK KGaA

3.1.1. Doppelproben-Sublimations-Experiment

Die Reproduzierbarkeit der NSM ist direkt an die Konstanz der Sublimationsrate von Naphthalin gekoppelt. Diese ist nach [27] von der Temperatur, dem Druck und weiteren Einflussgrößen abhängig. Um gelöst vom Einfluss der Schwankungen dieser Größen die Konstanz des Sublimationsverhaltens zu bestimmen, werden immer zwei Naphthalin-Proben parallel unter denselben Bedingungen sublimiert und nur diese miteinander verglichen. Die Sublimation erfolgt bei erzwungener Konvektion in einem Windkanal offener Bauweise im Saugbetrieb (siehe Abb. 3.2 sowie [1]). Die Zeit, in der die Proben der Konvektion ausgesetzt sind, ist dabei so kurz gewählt, dass nur ein kleiner, aber gut messbarer Teil des als Schicht vorliegenden Naphthalins verdampft. Vor und nach diesem gewollten Sublimationsvorgang werden die Oberflächen beider Proben vermessen und die Kornstruktur mittels mikroskopischer Aufnahmen untersucht. Jede Probe wird mehrmals genutzt bis sie soweit sublimiert ist, dass sie kleiner ist als das Beobachtungsgebiet. Alle Probenhalter sind kreiszylindrisch, besitzen denselben Außendurchmesser von 20 mm, eine Länge von 20 mm und bestehen aus Aluminium. Es werden drei Formen mit jeweils unterschiedlichen kreisförmigen Beschichtungsflächen mit den Durchmessern $d = 4; 8; 16$ mm genutzt, um den Einfluss verschiedener Strömungs- und Konzentrationsgrenzschichten infolge der Oberflächenkonturänderung untersuchen zu können. Um diesbezüglich den Einfluss des Probenhalters selbst konstant zu halten, werden bei Versuchen mit den beiden kleineren Beschichtungsflächen unbeschichtete Ringscheiben als Konturersatz eingesetzt. Die Proben sind so im Windkanal platziert, dass deren Abstand dem projizierten Abstand zu den Wänden gleicht. So ist gewährleistet, dass die Geschwindigkeitsgrenzschicht des Windkanals einen etwaig gleichen Einfluss auf beide Proben hat. Die Oberfläche der Naphthalin-Schicht beziehungsweise deren Dicke wird direkt nach einem Sublimationsvorgang optisch vermessen. Die hierzu notwendigen Referenzflächen sind ringförmig um die Beschichtungsflächen angeordnet und gegebenenfalls während der Sublimation von den Ersatzkonturringscheiben abgedeckt. Zur Ausrichtung der Probenhalter, sowohl im Windkanal als auch bei der Oberflächenvermessung, besitzen diese eine zentrische Steckpassung und einen Passstift.

3.1.2. Probengenerierung

Die Proben zur Untersuchung des Sublimationsverhaltens von Naphthalin werden mittels einer Vorrichtung durch Tauchschmelzen bei kontrollierter Atmosphäre erzeugt. Diese Atmosphäre besteht aus Luft, sofern die Naphthalin-Schicht aus einer unbehandelten Schmelze gewonnen wird. Hingegen bildet hochreines Helium² die Atmosphäre, wenn die Naphthalin-Schmelze zuvor durch Helium-Gaswäsche entgast wurde. Die Entgasung soll die Anzahl der Kristallisationskeime verringern und Lunkerbildung infolge sinkender Gaslöslichkeit des Naphthalins bei dessen Kristallisation minimieren. In Abb. 3.3 ist der prinzipielle Aufbau der Entgasungs- und Beschichtungsanlage skizziert. Vor dem eigentlichen Beschichten der Proben wird Naphthalin in einem Behälter geschmolzen und gegebenenfalls mit $3 \cdot 10^{-6}$ kg/s Helium für

²Helium 4.5 DIN EN 439 Reinheit > 99,996% He, Lieferant: LINDE AG

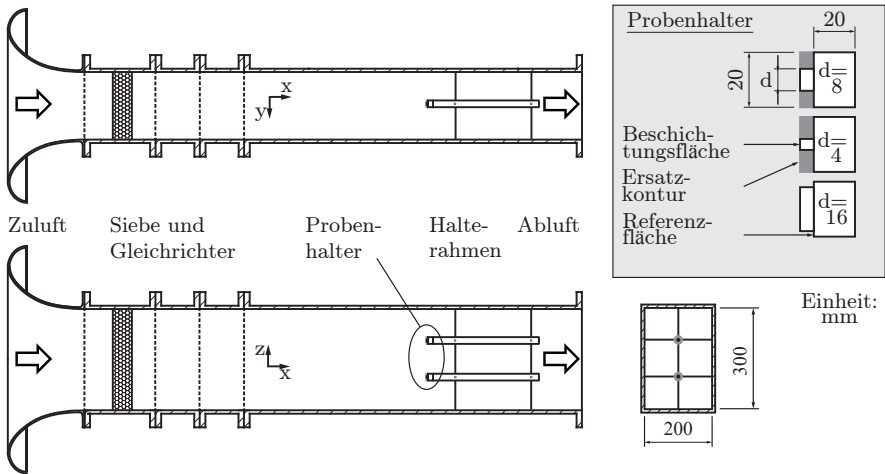


Abbildung 3.2.: Maßstäbliche Skizze des Windkanals mit Doppelproben; Basisquelle [1]

30 min entgast. Hierbei liegt etwa $3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$ Schmelze vor. Für eine möglichst gute Durchmischung von Naphthalin-Schmelze und Helium wird Letztgenanntes über eine Gasfritte aus gesintertem Messing am Boden des Schmelzbehälters zugeführt. Anschließend an den Schmelzvorgang füllt ein Teil der Schmelze das Tauchbad, dessen Pegel per Luft- oder Helium-Volumen oberhalb des Bades so reguliert wird, dass eine möglichst tropfenfreie Naphthalin-Schicht auf der Beschichtungsfläche des Probenhalters entsteht. Der Rest der Schmelze wird danach in den Schmelzbehälter per Luft oder Helium zurückgedrückt und verbleibt bei der jeweiligen Atmosphäre. Dieses Vorgehen ermöglicht es, mehrere Beschichtungsvorgänge mit entgastem Naphthalin durchzuführen, ohne dass dieses zwischenzeitlich Fremdgas lösen kann. Die so gewonnenen Naphthalin-Schichten werden wahlweise von Hand mit Schleifpapier angeraut oder roh belassen. Das Schleifen simuliert die spanende Bearbeitung, welche nach dem Beschichten einiger Kanalgeometrien notwendig ist, um zu starke Formabweichungen zu entfernen.

3.1.3. Optische Auflichtmikroskopie

In den meisten Fällen, in denen die NSM angewendet wird, ist das Trägersubstrat für die Naphthalin-Schicht opak. Oft ist es Aluminium, welches eine gewisse Oberflächenrauigkeit aufweist, die durch Sandstrahlen gezielt herbeigeführt wird. Diese Rauigkeit dient der besseren Haftung der Naphthalin-Schicht und vermeidet so ein Abtrennen dieser von dem Trägersubstrat bei Untersuchungen mit Systemrotation. Ein Nebeneffekt der Rauigkeit ist die gestiegene Anzahl an Kristallisationskeimen, wodurch das Kornwachstum der Naphthalin-Kristalle beeinflusst wird. Um beim Doppelproben-Sublimations-Experiment eine ähnliche

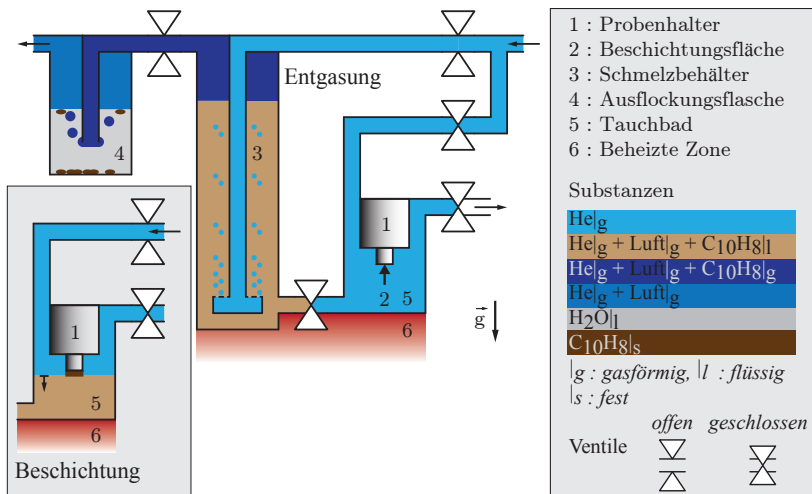


Abbildung 3.3.: Prinzipskizze der Entgasungs- und Beschichtungsanlage zur Generierung der Naphthalin-Proben bei Helium-Atmosphäre

Kornstruktur der Naphthalin-Schicht zu erhalten wie bei der Beschichtung von Kühlkanalmodellen, sind die Probenhalter ebenfalls durch Sandstrahlen aufgeraut. Aufgrund der Opazität und der Rauigkeit des Trägersubstrants wird zur optischen Untersuchung der Kristallstruktur des Naphthalins ein Auflichtmikroskop des Typs ZEISS AXIO SCOPE A1 im Hellfeld-Modus mit einer maximal genutzten Vergrößerung von 500 verwendet. Die Aufzeichnung der Bilder erfolgt durch eine CCD-Farbkamera des Typs ZEISS AXIOCAM ERC 5S mit einer Auflösung von $2.560/5,7 \times 1.920/4,28 \text{ px}^2/\text{mm}^2$, welche bei einem geeignet kleinen Sichtfeld ausreichend detaillierte Aufnahmen ermöglicht. Für die mikroskopische Abbildung der gesamten Naphthalin-Schicht einer Probe werden daher bis zu 30 Einzelbilder an verschiedenen Bereichen aufgenommen und per Algorithmus³ zusammengesetzt. Dieses Verfahren ist sehr langwierig und wird daher nur für ausgewählte Proben durchgeführt mit dem Ziel, das jeweilige mikroskopische Bild mit den Daten der hochauflösend vermessenen Oberfläche zu vergleichen. In allen anderen Versuchen wird nur ein Bereich pro jeweiliger Probe aufgenommen, allerdings bei jedem Vermessungsschritt derselbe.

3.1.4. Beschichtung der Kühlkanalmodelle

Der Prallkühlkanal und der Zyklonkühlkanal wird in einer inversen Tauchschmelzanlage mit Naphthalin (Zulieferer: Merck KGaA; Reinheit 99,9%) beschichtet. Deren Aufbau und Funktionsweise ist in [3] näher beschrieben. Die Beschichtung der bewusst vorgewärmten Kanalwände erfolgt unter Luft-Atmosphäre und mit unbehan-

³Verwendet wurde die Software MICROSOFT IMAGE COMPOSITE EDITOR

delter Schmelze. Eine spanende Nachbearbeitung der Schicht wird nur für den Prallkühlkanal durchgeführt.

3.1.5. Optische Oberflächenvermessung

In vielen dieser Arbeit vorangegangenen Untersuchungen wird die Messgröße der NSM, die örtliche Schichtdickendifferenz ΔS , mit einem Schichtdickenmesssystem auf Basis einer Wirbelstromsonde im PRE-POST-Verfahren gewonnen. Dieses Verfahren hat mehrere Nachteile. Es ist ein berührendes Verfahren, dessen Sonde bei jedem Aufsetzen auf die Naphthalin-Schicht je nach Härte dieser etwa $5\text{ }\mu\text{m}$ in diese eindringt. Im PRE-POST-Verfahren ergibt sich damit eine Unsicherheit von $10\text{ }\mu\text{m}$. Dieses entspricht einem relativen Fehler von 5% bei durchschnittlichen, maximalen Schichtdickenänderungen von etwa $200\text{ }\mu\text{m}$, welche durch die möglichst geringe Grenzschichtbeeinflussung durch Oberflächenänderung bedingt wird. Weiterhin mittelt die Wirbelstromsonde die Schichtdicke physikalisch in einem kreisförmigen Bereich mit einem Durchmesser von etwa $1.500\text{ }\mu\text{m}$. Um lokale Unterschiede im Stoffübergang auflösen zu können, muss daher oft die Kühlkanalgeometrie stark hochskaliert werden, was nicht nur zu Skalierungsfehlern führt, sondern auch den technischen Aufwand für Untersuchungen unter Systemrotation erschwert. Ferner benötigt die Schichtdickenmessung mittels berührender Sonde pro Messpunkt, selbst bei schneller Traversierung der Sonde, eine Zeit von etwa 3 s. Entsprechend lang dauert die Vermessung der Wände eines stark hochskalierten Kühlkanals, üblich sind durchaus 90 min. In dieser Zeit verringert sich die Naphthalin-Schicht durch Sublimation unter natürlicher Konvektion bei Vermessungsbedingungen um etwa $1,5\text{ }\mu\text{m}$. Im PRE-POST-Verfahren tritt dieses theoretisch nicht als Fehler auf, sofern die Messpunkte in Vor- und Nachmessung in gleicher Reihenfolge angefahren werden. Allerdings ist die Schichtdickenänderung durch natürliche Konvektion stark von der Umgebungstemperatur abhängig, welche unvermeidbar über die Zeit der Vermessung schwankt. Es muss daher eine weitere Unsicherheit von $1,5\text{ }\mu\text{m}$ angenommen werden. Aus diesen nachteiligen Gründen wird in dieser Arbeit eine nicht berührende Oberflächenvermessung mittels optischer Abstandsmessung basierend auf der Laser Trigonometrie eingesetzt. In Abb. 3.4 ist das System mit dessen wichtigsten Größen skizziert. Wahlweise wird ein Laser-Abstandsmesssystem vom Typ KEYENCE LK-G82 mit einem Messbereich von $z_m = 30\text{ mm}$ bei einer Wiederholgenauigkeit von $\pm 0,2\text{ }\mu\text{m}$ oder vom Typ KEYENCE LK-G152 mit einem Messbereich von $z_m = 80\text{ mm}$ bei einer Wiederholgenauigkeit von $\pm 0,5\text{ }\mu\text{m}$ verwendet. Der Abstand wird physikalisch gemittelt über eine Kreisfläche mit einem Durchmesser von $d = 70\text{ }\mu\text{m}$ im Falle des Sensors mit kleinerem Messbereich und im Falle des Sensors mit größerem Messbereich von $d = 120\text{ }\mu\text{m}$. Die Mittelung dauert in beiden Fällen $20\text{ }\mu\text{s}$ und kann mit einer Frequenz von 1 kHz wiederholt werden. Der jeweilige Sensor wird durch eine vierachsige Traversiereinheit des Typs AEROTECH AGS 10000 mit einer absoluten Positioniergenauigkeit in allen Linearachsen von $\pm 5\text{ }\mu\text{m}$ sowie einer Wiederholgenauigkeit von $\pm 2,5\text{ }\mu\text{m}$ in transversaler Richtung x, y und $\pm 1\text{ }\mu\text{m}$ in lateraler Richtung z kontinuierlich, mäanderförmig über der zu messenden Oberfläche verfahren. Alternativ kann eine Rotationsachse u integriert werden mit einer Positioniergenauigkeit von $\pm 0,001.39^\circ$ sowie einer Wiederholgenauigkeit von $\pm 0,000.28^\circ$.

Vier Achsen Portal

Aerotech AGS10000

Wiederhol- | Genauigkeit:

x +/- 2,5 | 5,0 μm

y +/- 2,5 | 5,0 μm

z +/- 1,0 | 5,0 μm

u +/- 4,9 | 24,3 $^\circ$

CCD Laser Abstands Sensor

Keyence LK-G82

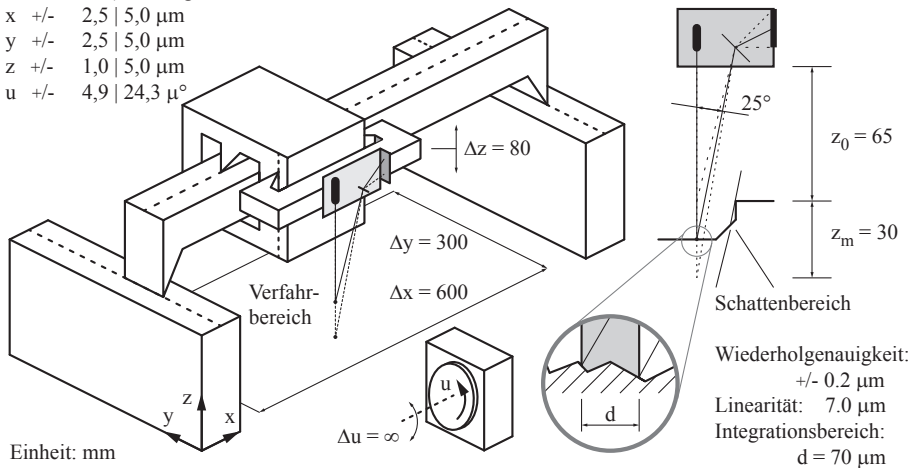
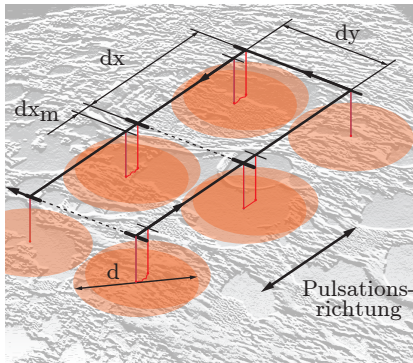


Abbildung 3.4.: Prinzipskizze der Schichtdickenvermessung

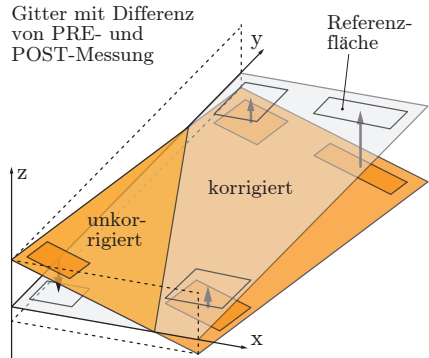
und einer radialen Verschiebung von maximal $\pm 2 \mu\text{m}$. Jede Einzelmessung startet dabei positionsabhängig gepulst, wie in Abb. 3.5a skizziert. Eine zuverlässige Pulsung der Einzelmessung wird allerdings durch den Positionsgeber der Traversiereinheit auf eine Frequenz kleiner 0,9 kHz begrenzt. Verfahrensgeschwindigkeiten größer $F > 100 \text{ mm/s}$ werden vermieden, um einen überlappenden Mittelungsbereich durch die Mittelungszeit der Einzelmessung von weniger als $dx_m < 2 \mu\text{m}$ zu erhalten. Die gewünschten Gitterweiten dx, dy mit der die Oberflächen vermessen werden, sind jeweils bei den Ergebnissen angegeben und liegen zwischen $30 \mu\text{m}$ und $1.500 \mu\text{m}$. Drei nachteilige Eigenschaften der optischen Oberflächenvermessung müssen bei der Interpretation der Messwerte berücksichtigt werden.

Oberflächenbeschaffenheit Durch Einzelmessungen während des Verfahrens können die lokal schwankenden Oberflächeneigenschaften wie Brechungsindex und Transparenz das Messergebnis gravierend beeinflussen und gegebenenfalls sogar Werte liefern, die außerhalb des Messbereichs liegen. Diese Werte werden gekennzeichnet und bei der Interpretation nicht berücksichtigt.

Abschattung Eine weitere nachteilige Eigenschaft ist der Schatteneffekt (siehe Abb. 3.4), welcher an Kanten und Schrägen durch Verdecken des reflektierten Laserlichts auftreten kann. Somit ist es auch nur möglich, den Boden eines Lochs zumindest stellenweise zu vermessen, wenn dieses keinen Halbkugel mit einem Spitzenwinkel von 25° aufnehmen kann. Sobald der Schatteneffekt auftritt, werden diese Werte gekennzeichnet und bei der Interpretation nicht berücksichtigt.



(a) Schematische Darstellung der Pulsung bei der Oberflächenvermessung



(b) Rechnerische Lagekorrektur durch zweiachsiges Kippen anhand von Referenzflächen

Abbildung 3.5.: Pulsation und Lagekorrektur bei der Oberflächenvermessung

Lagekorrektur Um aus zwei Abstandsmessungen die Dickenänderung der Naphthalin-Schicht zu erhalten, werden beide Messergebnisse voneinander abgezogen. Hierzu muss das Trägersubstrat mit einer Genauigkeit von wenigen μm in beiden Messungen identisch positioniert sein. Bereits aus Gründen der thermischen Dehnung ist dieses nicht möglich. Daher werden immer vier unbeschichtete Referenzflächen mit einer ausreichenden Anzahl an Messpunkten in die Messung einbezogen (siehe Abb. 3.5b). Anhand der Mittelwerte dieser Referenzflächen wird das Messgitter mit der Differenz zweier Messungen (PRE und POST) mittels eines Algorithmus solange um zwei Achsen iterativ gekippt, bis die neu berechneten Mittelwerte der Messpunkte in den vier Referenzflächen minimal geworden sind. Annahme hierbei ist, dass der Substratträger formsteif ist. In einigen Fällen, bei Versuchen mit dem Prallkühlkanalmodell unter Systemrotation, verwölbte sich dieser plastisch um etwa $10\ \mu\text{m}$. Diese Abweichung kann durch die Lagekorrektur nicht beseitigt werden und beeinflusst das Endergebnis signifikant. Bei der entsprechenden Interpretation wird dieses berücksichtigt.

3.1.6. Rotationsprüfstand

Die Durchströmung zur Erzeugung des konvektiv getriebenen Stoffübergangs in den generischen Kühlkanälen, sowohl mit als auch ohne Systemrotation, erfolgt in einer eigens für diesen Zweck konzipierten Zentrifuge, dem sogenannten Rotationsprüfstand (siehe Abb. 3.6). Hauptelemente des Prüfstandes sind:

- ①, ④, ⑤ Antriebseinheit mit einem Gleichstrommotor (111 kW bei 2.500 1/min), einem Kettentrieb, einer Bremse und der Wellenlagerung mit gekühlter Ölumlaufschmierung.
- ②, ③ Telemetrie mit einem 32-kanaligen, parallel arbeitenden Differenzdruckaufnehmer SCANIVALVE ZOC22B/32Px-10“H2O-VL und AD-Wandler SCANIVALVE E-

RAD4000 sowie einem Thermistorspannungsverstärker (Eigenbau) für 32 Thermistoren 10 k Ω und AD-Wandler GOLDAMMER G0A-1024-9 MC USB 16 Bit 32SE/16DI mit weiteren analogen und digitalen Ein- und Ausgängen, sowie USB- und Ethernet-Anschlüssen und der mehrkanaligen Spannungsversorgung 5...24 V. Die Datenübertragung erfolgt durch zwei frei wählbare WLAN-Kanäle.

⑦... ⑫ Luftlieferanlage bestehend aus zwei Massenstromregelstrecken mit je einem Dralldurchflussmesser ABB S4000 FS4000, je einer Temperaturmessung mittels Widerstandsthermometer ENDRESS & HAUSER iTEMP Pt1000 TC, je einer Wanddruckmessung mittels Absolutdruckaufnehmer AHLTEN AGS4103A. Die Regelung der Massenströme erfolgt über die Prüfstandssteuerung (mehrere AD-Karten von NATIONAL INSTRUMENTS und Eigenbauten) und drei elektrisch betriebene Kugelventile STÜBBE C110. Ein Ventil am Bypass des im saugenden Betrieb verwendeten Gebläses SIEMENS Elmo-G 22,6 kW ($\dot{V}_{\max} = 550 \text{ m}^3/\text{h}$) stellt den Massenstrom ein. Die beiden anderen Ventile regeln die Aufteilung des Massenstroms auf zwei Stränge. Zur Überführung dieser beiden Massenströme aus dem rotierenden in das stehende System wird ein sogenannter Fluidübertrager verwendet. Die Ansaugung erfolgt durch den Rotor aus der Umgebung.

⑥ Rotor mit Plenum. Innerhalb des Plenums (siehe Abb. 3.7) befindet sich die Experimentstreckenaufnahme ② auf der die jeweiligen Kühlkanalmodelle zur Durchströmung fixiert werden. Diese Aufnahme versorgt die Kanalmodelle mit dem Zufuhrmassenstrom und ermöglicht es, den Anstellwinkel α zur Rotationsachse ω zu variieren. Zwei Luftführungen ③, ④ verbinden das Plenum mit der Luftlieferanlage, wobei die Luftführung ③ direkt an den Kanalmodellen angeschlossen werden kann. Die maximal zulässige Drehzahl des Rotors liegt bei 1.500 1/min, welche jedoch aus Gründen von nicht direkt behebbaren Taumelschwingungen⁴ auf 500 1/min herabgesetzt ist. Detaillierte Informationen zum Rotor des Prüfstandes finden sich in [28].

3.1.7. Magnetic Resonance Velocimetry

Um die Ergebnisse der NSM aussagekräftig zu interpretieren, ist die Kenntnis der vorliegenden Strömung hilfreich. Für beide hier verwendeten Kühlmethoden wird das jeweilige Geschwindigkeitsfeld im nicht rotierenden Fall, also im Inertialsystem, experimentell mittels Magnetic Resonance Velocimetry (MRV) ermittelt. Die MRV ist in den Ingenieurwissenschaften ein noch relativ unbekanntes Verfahren, um ein quasistationäres, dreidimensionales Geschwindigkeitsfeld einer beliebigen Strömung aus Wasserstoffprotonen zu messen. Eine ausführliche Beschreibung dieses Verfahrens ist hier nicht zielführend und übersteigt den Rahmen dieser Arbeit. Diesbezüglich sei auf [29], [30] und [31] verwiesen. Wissenswert ist an dieser Stelle nur, dass mittels MRV innerhalb eines geringen Zeitaufwands von zirka 20 Minuten, alle Geschwindigkeitskomponenten einer stationären oder periodischen Wasserströmung mittels eines Magnetresonanztomographen (MRT) bestimmt werden können. In diesem Fall

⁴Behebbar sind diese durch eine neue Welle-Lager-Konfiguration, welche aus Zeitgründen nicht in den Prüfstand eingebaut wurde.

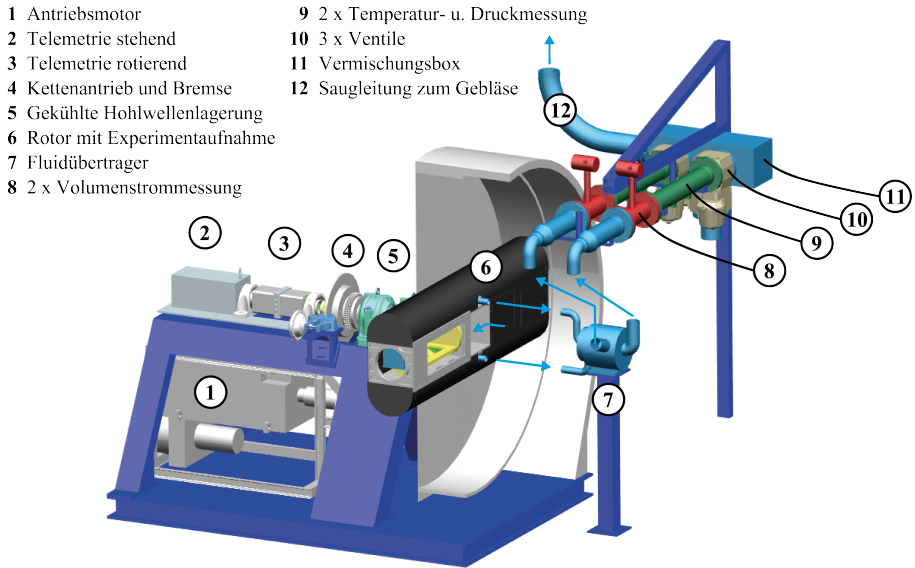


Abbildung 3.6.: Rotationsprüfstand mit den wesentlichen Komponenten

wird ein Tomograph mit einer magnetischen Flussdichte von $B = 3 \text{ T}$ verwendet und die maximal direkt auflösbare Geschwindigkeit wird zu $V_{ENC} = 5 \text{ m/s}$ gesetzt. Die Abmessung der aufgelösten Volumenelemente beträgt $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$. Um das Magnetfeld nicht zu deformieren, müssen die Bewandung der Strömung sowie alle weiteren Bauteile in der Nähe der Strömung aus nichtferromagnetischem Material bestehen. Beide hier untersuchten Kanalströmungen (Zyklon- und Prallkühlkanal) werden daher durch Kanalmodelle erzeugt, welche aus Polyamid mittels Laser-Sinter-Verfahren hergestellt sind. Zu deren Durchströmung wird ein geschlossenes Fluidfördersystem mit Regelung der Reynolds-Zahl eingesetzt. Durch die Verwendung der Reynolds-Zahl als maßgeblicher Ähnlichkeitsparameter wird angenommen, dass Effekte von örtlich nicht isoviskosem Verhalten vernachlässigbar sind. Sowohl der Bauraum des Tomographen, der begrenzte Massenstrom des Fluidfördersystems, die maximal aufgelöste Geschwindigkeit sowie die Kavitationsvermeidung verlangen eine andere Skalierung der generischen Kanalmodelle. Der Zyklonkühlkanal zur Strömungsvermessung wurde nicht, wie bei dem Kanalmodell zur Untersuchung des Stoffübergangs, mit dem Skalierungsfaktor $SF = 10$ sondern mit $SF = 7,5$ vergrößert. Beim Prallkühlkanal zur Strömungsvermessung ist der Faktor mit $SF = 3,5$ ebenfalls kleiner als der zur Stoffübergangsmessung mit dem Faktor $SF = 7$. Für beide Kanäle sind die entsprechenden Werte in Tab. A.2 und Tab. A.1 daher umzurechnen. Für den Prallkühlkanal ist anzumerken, dass er nur aus einem Segment mit zwei Bohrungen pro Reihe besteht und der Winkel der Bohrung A2 bezüglich Wand D auf $\alpha_{A1} = 10^\circ$ verringert wurde.

Das Fluidfördersystem stellte das CENTER OF SMART INTERFACES der TECHNISCHEN UNIVERSITÄT DARMSTADT zu Verfügung. Die MRV-Messungen wurden in Zusammenarbeit mit dem DEPARTMENT OF RADIOLOGY, MEDICAL PHYSICS der UNIVERSITÄTSKLINIK FREIBURG an einem MRT der UNIVERSITÄTSKLINIK FREIBURG durchgeführt.

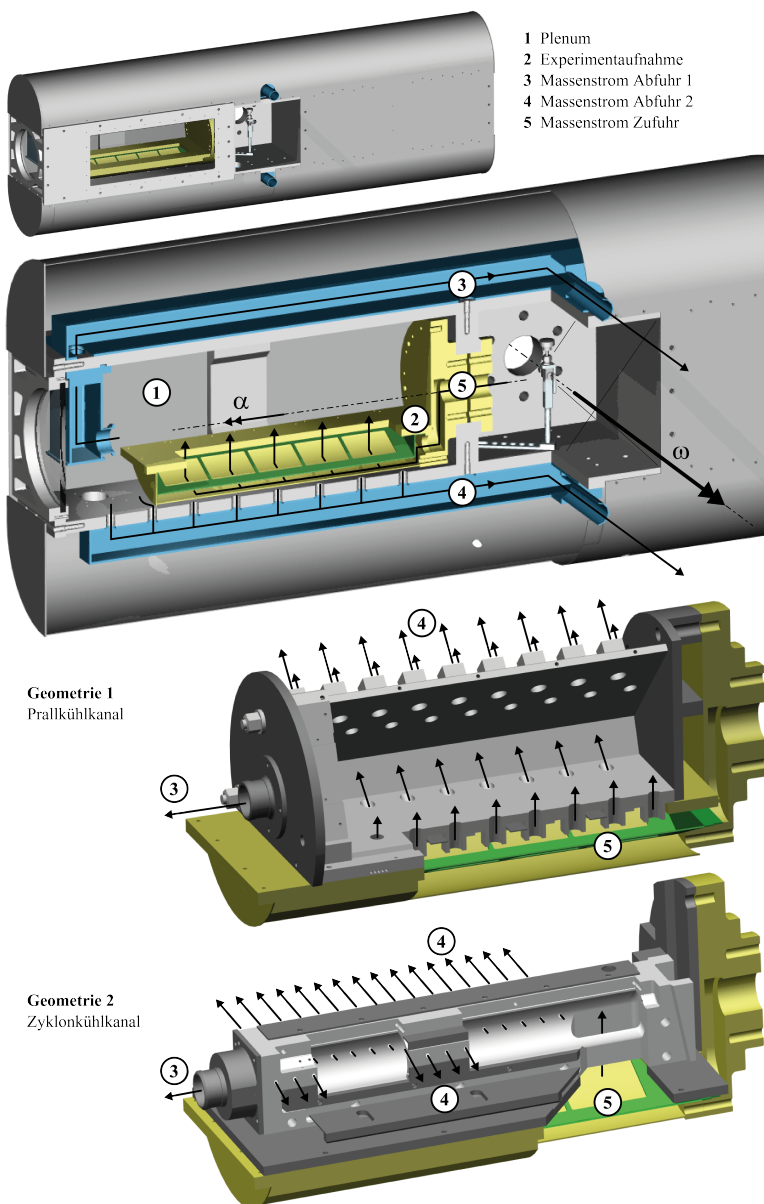


Abbildung 3.7.: Experimentaufnahme des Rotationsprüfstandes

3.2. Theoretisches Vorgehen

Ziel der theoretischen Betrachtungen ist es, die analytisch ermittelbare Unsicherheit der SAM wenn möglich quantitativ abzuschätzen und Unwägbarkeiten aufzuzeigen. Basis dieser Abschätzung ist das Gleichungssystem der SAM, bei dessen Herleitung Postulate getroffen werden, die als Bedingungen während der praktischen Umsetzung der SAM erfüllt werden müssen. Die Abweichungen von den tatsächlich vorliegenden Bedingungen und den angenommenen liefern die theoretische Unsicherheit der SAM. Weiterhin wird durch das Gleichungssystem der SAM die eingeschränkte Skalierbarkeit von Kühlungsströmungen aufgezeigt. Die theoretischen Betrachtungen sind relativ ausführlich dokumentiert, da dem Autor keine Veröffentlichung bekannt ist, die sich mit dieser Thematik umfassend befasst. Um Lücken in der Theorie auszuschließen und keines der notwendigen Postulate zu übersehen, was bei einem Zusammensetzen von Aussagen aus verschiedenen Quellen nicht auszuschließen wäre, wird dieser Aufwand unumgänglich.

Anmerkung Die theoretischen Betrachtungen dienen in dieser Arbeit primär der Generierung von Erkenntnissen. Das Kap. 4 ist daher als ein Ergebniskapitel anzusehen und nicht als ein Kapitel zur alleinigen Erläuterung theoretischer Grundlagen. Auf ein üblicherweise gesondertes Grundlagenkapitel wird verzichtet.

4. Theoretische Betrachtungen

Die Skalierte Analogie Methode (SAM) basiert auf dem Vergleich zweier, als sich analog verhaltend postulierter Strömungssysteme, die jedoch unterschiedlichen Bedingungen unterliegen. Das eine System, im Folgenden Heißgas-System genannt, besteht aus einem einkomponentigen, strömenden Gas. Dessen Wärmetransport ist die vorwiegend interessierende Größe. Die Bedingungen, die dieses System prägen, werden einem Kühlsystem einer technischen Anwendung entnommen. Das Heißgas-System repräsentiert daher das physikalische Verhalten beispielsweise einer konvektiven Innenkühlung von Turbinenschaufeln. Das zweite System, im Weiteren mit Stoff-System bezeichnet, besteht aus einem strömenden, zweikomponentigen, also binären Gasgemisch. Die vorwiegend interessierende Größe ist dessen Stofftransport. Alle das System prägenden Bedingungen entstammen einer Skalierung der im Heißgas-System verwendeten Bedingungen, sowie weiteren, die durch die verwendete Messmethode, die Naphthalin-Sublimations-Methode (NSM), geprägt sind. Das Stoff-System stellt daher ein Strömungssystem dar, welches sich ähnlich verhält wie das Heißgas-System, sich jedoch bei bestimmten Bedingungen experimentell leichter untersuchen lässt. Ziel der SAM ist es, die prägenden Bedingungen des experimentell zu vermessenden Stoff-Systems so einzustellen, dass dessen Stofftransport sich analog verhält zum eigentlich interessierenden Wärmetransport des Heißgas-Systems. Dieses ist allerdings nur dann möglich, wenn auch das Heißgas-System gewissen Bedingungen unterliegt. Ist beides gegeben, so ist die Analogie von Wärme- und Stofftransport (WSA) erfüllt und lässt sich für ingenieurwissenschaftliche Untersuchungen ausnutzen.

4.1. Theorie der SAM

Wie jede experimentelle Methode beruht auch die SAM auf einem physikalischen Modell, welches durch Gleichungen eindeutig beschrieben wird. Die Gleichungen der SAM ergeben sich aus den Grundgleichungen des physikalischen Verhaltens von Strömungssystemen, welche durch 24 Postulate (P. 1 bis P. 24, zusammengefasst in Kap. 4.1.6) vereinfacht werden. Diese Vereinfachungen stellen die zur Gültigkeit der WSA notwendigen Bedingungen dar. Sofern sich diese Annahmen mit dem real vorliegenden Verhalten decken, sind sie gerechtfertigt. Besteht jedoch eine größere Abweichung oder gar ein Widerspruch zwischen Annahmen und realem Verhalten der Strömungssysteme, so kann die Aussagefähigkeit der SAM sinken. Derartige Qualitätseinbußen sind in der Regel nur sehr schwer determinierbar. Allerdings lassen sich die Auswirkungen von einigen, nicht zutreffenden Annahmen quantitativ abschätzen und anhand dieser die theoretische Unsicherheit der SAM näherungsweise bestimmen. Diese Abschätzung ist das Kernziel der theoretischen Betrachtungen.

4.1.1. Herleitung der Gleichungen der SAM

Das Gleichungssystem der SAM wird in mehreren Schritten aus der Kinetischen Gastheorie hergeleitet. Diese Herleitung ist äußerst umfangreich und deren detaillierte Darlegung nicht zielführend. Sie befindet sich vollständig aber unkommentiert im Anhang (Anh. B bis Anh. N). Nachfolgend werden nur die wesentlichen Schritte erläutert und bezüglich des algebraischen Vorgehens wird an entsprechender Stelle auf den jeweiligen Anhang verwiesen. Zur Übersicht ist die Struktur der Herleitung in Abb. 4.1 als vereinfachtes Schaltbild visualisiert.

1. Schritt Basis für die Herleitung ist die Boltzmann'sche Transportgleichung (BTGL) Gl. B.1 der Kinetischen Gastheorie. Sie beschreibt den Transport der Größen Masse (M), Impuls (I) und Energie (E), bedingt durch die Kollisionen und Bewegungen der Teilchen innerhalb eines Gases, mittels Gleichungen der nichtrelativistischen Mechanik. Hierbei wird angenommen, dass sich die Gasteilchen verhalten wie unendlich steife Kugeln, die kein Wechselwirkungspotenzial besitzen. Diese Vorstellung wird als Hartkugel-Modell bezeichnet und ist eine vereinfachende Annahme. Aus BTGL und deren in Anh. C angegebenen Momente folgen dann die voneinander unabhängigen, allgemeinen Erhaltungsgleichungen (AEGI) der Transportgrößen für ein einkomponentiges Gas zu Gl. D.1 bis Gl. D.3 und für ein mehrkomponentiges Gas als inertes, dissoziationsbeständiges Gemisch zu Gl. D.4 bis Gl. D.12.

2. Schritt Jeweils für das einkomponentige Gas und das Gemisch werden diese Gleichungen zu einem Gleichungssystem Gl. F.18 bis Gl. F.20 und Gl. F.21 bis Gl. F.25 gekoppelt, wodurch sich der formale Umfang der Gleichungen reduziert. Die gekoppelten Erhaltungsgleichungen (GEGI) sind daher nur im Verbund des jeweiligen Systems gültig und müssen alle erfüllt werden. Physikalisch bedeutet die Kopplung, dass nur ein Teil der jeweiligen Transportgröße bilanziert wird. Die allgemeine Impulserhaltungsgleichung (AEGI I) berücksichtigt noch jede Impulsform, also den Massenflussimpuls und die Kraftänderung. Durch die Kopplung mit der allgemeinen Massenerhaltungsgleichung (AEGI M) entfällt jedoch die Änderung des Impulsflusses durch eine Änderung des Massenstroms. Die gekoppelte Impulserhaltungsgleichung (GEGI I) bilanziert daher nur die Kraftänderungen und kann somit auch als Bewegungsgleichung bezeichnet werden. Ebenso entfällt aus der Energieerhaltungsgleichung die Änderung der Energie aufgrund von Impulsflussänderungen, also die makroskopisch kinetische Energie. Die gekoppelte Erhaltungsgleichung der Energie (GEGI E) ist daher nur eine Bilanzgleichung für die innere Energie.

3. Schritt Eine weitere Reduktion des formalen Umfangs der Gleichungen wird durch die in Anh. G angegebene Umformung mittels des materiellen Differentials nach Gl. G.1 erreicht. In dieser Form enthalten die Gleichungen noch Größen, wie die Diffusionsgeschwindigkeit, die durch Materialgesetze in makroskopisch erfassbare Variablen, wie die Konzentration und den Diffusionskoeffizienten überführt werden müssen. Diese Materialgesetze sind heuristische Abbildungen und stellen beträchtliche Vereinfachungen der Gleichungen dar. Um sie nicht unbegründet zu

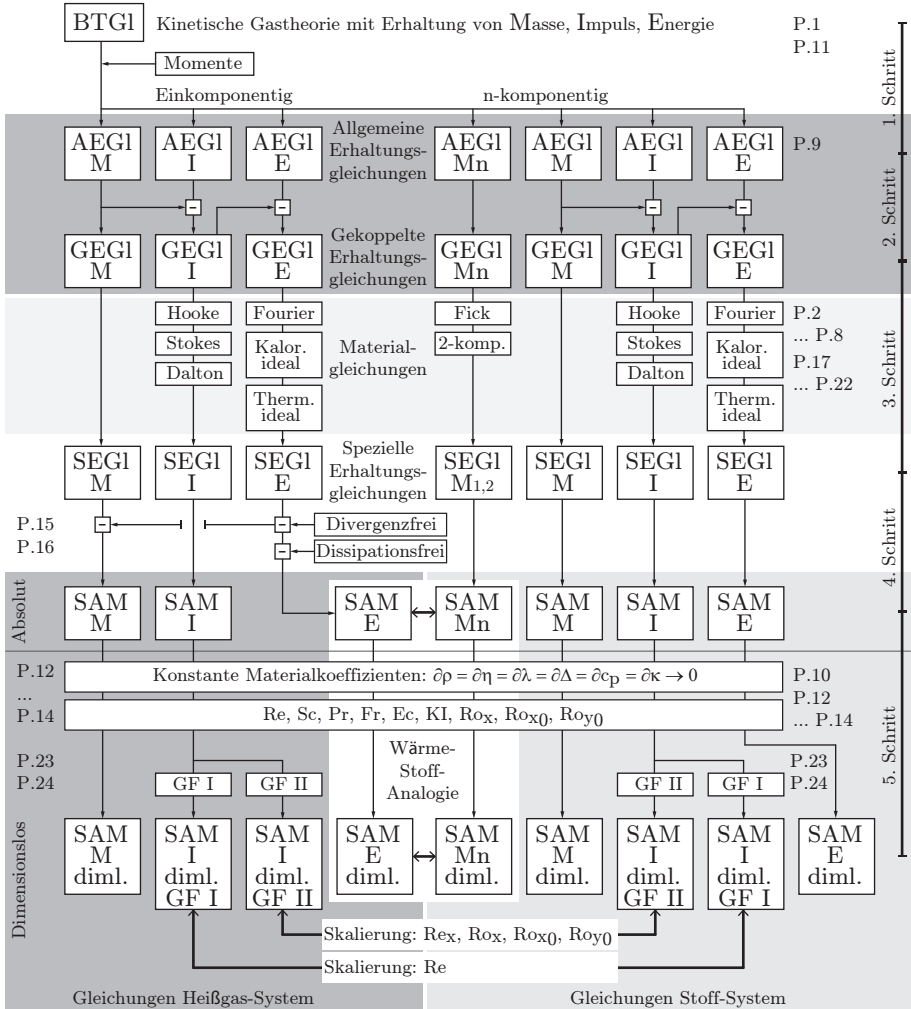


Abbildung 4.1.: Herleitungsstruktur der Gleichungen der SAM

lassen, werden die Materialgleichungen und deren Bedingungen (**P. 2** bis **P. 8** und **P. 18** bis **P. 22**) in Anh. H aus allgemeinen Ansätzen hergeleitet und näher beschrieben. Wesentlich für die theoretische Unsicherheit der SAM sind nur die Ergebnisse dieser Herleitungen, die Materialgleichungen und die Postulate beziehungsweise Bedingungen. Sie werden in Kap. 4.1.2 angegeben. Durch Einsetzen der Materialgleichungen in die gekoppelten Erhaltungsgleichungen ergeben sich die speziellen Erhaltungsgleichungen (SEGI), drei für das einkomponentige Gas Gl. I.1 bis Gl. I.3 und vier für das nun zweikomponentige Gl. I.4 bis Gl. I.7. Sie enthalten nur makroskopisch beschreibbare Größen und genügen folglich den Bedingungen der heuristischen Kontinuumstheorie. Die Massen- und Impulserhaltungsgleichungen (SEGI M, I) entsprechen daher den Navier-Stokes-Gleichungen sofern in diesen die Materialkoeffizienten als Funktionen der Zustandsgrößen angenommen werden. Weiterhin ließen sich die Erhaltungsgleichungen der inneren Energie (SEGI E) auch aus dem ersten Hauptsatz der Thermodynamik heuristisch ableiten, im Falle des einkomponentigen Gases für geschlossene Systeme und im Falle des zweikomponentigen Gases für offene Systeme. Auch die Massenerhaltungsgleichung einer der Komponenten des binären Gasgemisches (SEGI M_{1,2}) ließe sich heuristisch postulieren. Allerdings werden nur durch die Herleitung aus der Kinetischen Gastheorie alle notwendigen Annahmen und Einschränkungen identifiziert. Beispielsweise folgt aus der Kinetischen Gastheorie automatisch, dass die dynamische Viskosität eines Gases eine bei der SAM ungewollte Temperaturabhängigkeit besitzt (**P. 13**), welche sich ferner mit gaskinetischen Modellen bestimmen lässt. Die Kontinuumstheorie kann hierzu keine Aussage treffen.

4. Schritt Die speziellen Erhaltungsgleichungen, mit den Ausnahmen der Massen- und Energieerhaltungsgleichung des einkomponentigen Gases, entsprechen den Gleichungen der SAM. Um die angestrebte WSA zu erfüllen, müssen zwei physikalische Mechanismen zur Änderung der inneren Energie des einkomponentigen Gases ausgeschlossen werden. Gegenüber der Wärmeleitung darf die Dissipation und die Volumenänderungsarbeit, also auch die Geschwindigkeitsdivergenz nur einen sehr geringen Einfluss haben. Beides wird bei der SAM postuliert (**P. 15**, **P. 16**) und die entsprechenden Terme in der speziellen Erhaltungsgleichung der inneren Energie des einkomponentigen Gases Gl. I.3 werden vernachlässigt. Dieses Vorgehen wird in Anh. J dargelegt. Es entsteht die Energieerhaltungsgleichung des Heißgas-Systems (SAM E). Diese entspricht formal der Massenerhaltungsgleichung einer Komponente des Stoff-Systems (SAM M_n) und die WSA ist damit erfüllt. Die angenommene Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes des einkomponentigen Gases ist trivial gegeben, wenn dieses inkompressibel ist. Als Folge vereinfacht sich die spezielle Erhaltungsgleichung der Masse Gl. I.1 des kompressiblen, einkomponentigen Gases zur Erhaltungsgleichung der Masse der SAM (SAM M) Gl. J.7, welche für das inkompressible Gas des Heißgas-Systems gültig ist.

5. Schritt Die in Kap. 4.1.3 angegebenen Gleichungen der SAM Gl. 4.14 bis Gl. 4.17 und Gl. 4.18 bis Gl. 4.21 beinhalten Materialkoeffizienten, deren Abhängigkeiten von den Zustandsgrößen Temperatur T , Druck p und im Falle des Stoff-Systems auch vom

Massenanteil ξ_a , im Heißgas- und im Stoff-System unterschiedlich sind. Weiterhin sind das Niveau und die räumliche Verteilung der Zustandgrößen in beiden Systemen verschieden. Daher lassen die Gleichungen der SAM formuliert in absoluten Variablen keinen direkten Vergleich von Heißgas- und Stoff-System zu. Um dieses zu erreichen müssten die Gleichungen so transformiert werden, dass die räumliche Verteilung der jeweiligen Materialkoeffizienten im Heißgas- und Stoff-System identisch sind. Hierzu ist die Kenntnis der Temperatur-, Druck- und Konzentrationsfelder des expliziten Falls notwendig. Allgemein lässt sich nur eine vereinfachte Transformation durchführen und anhand dieser die Vergleichbarkeit näherungsweise herstellen. Bei der Transformation werden alle Materialkoeffizienten konstant gesetzt und alle Variablen und deren differentiellen Terme durch maßgebende, als charakteristisch bezeichnete Größen entdimensioniert. Es entstehen die dimensionslosen Gleichungen der SAM (SAM diml.) Gl. 4.41 bis Gl. 4.44 und Gl. 4.45 bis Gl. 4.48.

Das Ziel der SAM, der analoge Transport von Wärme im Heißgas-System und von Stoff im Stoff-System kann nur erreicht werden, wenn die jeweiligen Koeffizienten dieser Gleichungen im Heißgas- und Stoff-System identische Werte annehmen. Erst dann verhalten sich beide Systeme ähnlich und ein Vergleich ist gerechtfertigt. Bei der Anwendung der SAM müssen daher die physikalischen Bedingungen, wie beispielsweise die Temperatur, entsprechend eingestellt werden. Allerdings unterliegt der Transport von innerer Energie im Heißgas-System anderen und weniger physikalischen Mechanismen als im Stoff-System. Es existieren daher in beiden Systemen unterschiedliche Koeffizienten wodurch die Ähnlichkeit gefährdet ist. Die dimensionslosen Gleichungen ermöglichen es jedoch, diese Abweichungen abzuschätzen und Rückschlüsse zur Ungenauigkeit der SAM zu ziehen. Ebenso schließt diese Abschätzung das Zutreffen der Vereinfachungen mit ein, welche im 4. Schritt der Herleitung notwendig sind. Die Abschätzung wird im Detail in Kap. 4.2 beschrieben und deren Ergebnisse werden diskutiert. Auch wenn die dimensionslose Erhaltungsgleichung des Impulses, also die Bewegungsgleichung, trotz der Vereinfachungen als gültig angesehen wird, zeigt die in Kap. 4.3 diskutierte Skalierbarkeit, dass Strömungen in rotierenden Systemen nur sehr eingeschränkt vergleichbar sind. Die entdimensionierende Transformation, im Weiteren auch als Entdimensionierung bezeichnet, ist daher eine essentielle Grundlage zur Bestimmung der Ungenauigkeit der SAM und wird in Kap. 4.1.4 ausführlich erläutert.

4.1.2. Verwendete Materialgleichungen

Die gekoppelten Erhaltungsgleichungen (GEGI) werden im 3. Schritt der Herleitung in die speziellen Erhaltungsgleichungen (SEGI) überführt und beinhalten dann ausschließlich makroskopische Variablen. Verwendet werden dazu aus heuristischen Ansätzen abgeleitete Materialgleichungen, welche nur bei bestimmten Bedingungen gültig sind. Gleichungen und Bedingungen werden in Anh. H hergeleitet und erläutert. Zur Bestimmung der theoretischen Unsicherheit der SAM reicht das Ergebnis dieser Herleitung, also die Materialgleichungen und deren Bedingungen aus. Sie werden im Folgenden angegeben und zur späteren Bezugnahme als Postulat **P.x** gekennzeichnet.

Abbildung der Spannungen durch Deformationen

Die Normalspannungen \tilde{p} in den gekoppelten Erhaltungsgleichungen von Impuls und Energie werden durch Gl. 4.1 abgebildet als thermodynamischer Druck p , welcher im Folgenden auch schlicht als Druck bezeichnet wird. Weiterhin werden die Schubspannungen $\hat{\tau}_{ij}$ mit Gl. 4.2 als Reibspannungen angenommen. Der Materialkoeffizient η wird als dynamische Viskosität bezeichnet und ist eine Funktion der Zustandsgrößen Temperatur T , Druck p und im Stoff-System auch des Massenanteils ξ_s . Das treibende Potenzial bilden räumliche Geschwindigkeitsänderungen wie die Divergenz $\partial w_k / \partial x_k$.

$$\tilde{p} = p \quad (4.1)$$

$$\hat{\tau}_{ij} = \eta(T, \xi_s, p, \dots) \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \quad (4.2)$$

Bedingungen Die Materialgleichungen für Normal- und Schubspannung sind gültig für Gase und Gasgemische, die sich nach dem isotropen Hooke'schen Gesetz verhalten **P. 3**, sofern die Drehimpulserhaltung **P. 2** sowie die Stokes'sche Hypothese Gl. H.9 **P. 4** erfüllt sind.

Abbildung der inneren Energie durch die Temperatur

Die innere Energie u_s einer Gaskomponente beziehungsweise u des Gemisches und des einkomponentigen Gases werden abgebildet durch die kalorischen Zustandsgleichungen Gl. 4.3 und Gl. 4.4. Der Materialkoeffizient ist die spezifische isochore Wärmekapazität c_v . Ist diese von der Temperatur unabhängig, wird Zustandsänderung als kalorisch ideal bezeichnet. Es wird angenommen, dass sich diese im Falle des Gasgemisches aus den einzelnen, spezifischen isochoren Wärmekapazitäten der Komponenten $c_{v,s}$ durch Wichtung über die Teilchenmassen der Gaskomponenten gemäß Gl. 4.6 bestimmen lässt. Sie ist eine Funktion der Zustandsgrößen Temperatur T , Druck p und im Stoff-System auch des Massenanteils ξ_s . Die Temperatur T stellt das Potenzial der inneren Energie dar.

$$\begin{aligned} u_s(T, \rho_s) &= u_s^{ref} + \int_{T_{ref}}^T c_{v,s}^{ref}(T, \rho_s) dT \\ &\equiv c_{v,s}(\rho_s) T \quad \forall \quad c_{v,s}^{ref} \neq c_{v,s}^{ref}(T) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} u(T, \rho_s, \xi_s) &= u_{s,\xi_s}^{ref} + \int_{T_{ref}}^T c_v^{ref}(T, \rho_s, \xi_s) dT \\ &\equiv c_v(\rho_s, \xi_s) T \quad \forall \quad c_v^{ref} \neq c_v^{ref}(T) \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$u(T, \rho_s, \xi_s) = \sum_{s=1}^m (u_s \xi_s) \quad (4.5)$$

$$c_v(T, \rho_s, \xi_s) = \sum_{s=1}^m (c_{v,s}(T, \rho_s) \xi_s) \quad (4.6)$$

Bedingungen Die kalorische Zustandsgleichung des Gasgemisches ist gültig, sofern alle Komponenten des Gases als kalorisch ideales Gas angesehen werden können **P. 8**. Weiterhin müssen zur Bestimmung der spezifischen isochoren Wärmekapazität des Gemisches mittels Wichtung der Massenanteile die Van der Waals-Durchmesser aller Teilchen hinreichend ähnlich sein **P. 17**.

Kopplung von Temperatur, Druck und Massendichte

Die Zustandsgrößen Temperatur T und Druck p werden durch die Zustandsgleichungen Gl. 4.7 und Gl. 4.9 mit der Zustandsgröße Massendichte ρ_s einer Gaskomponente beziehungsweise ρ des Gemisches und des einkomponentigen Gases abgebildet. Das Gas wird dann als thermisch ideal bezeichnet. Die Materialkoeffizienten sind jeweils die spezifische Gaskonstante R_s beziehungsweise R . Der Druck des Gemisches p wird durch das Gesetz von Dalton Gl. 4.8 als Linearkombination der partiellen Drücke der Komponenten p_s abgebildet.

$$p_s = \rho_s T R_s = n_s T \tilde{R} \quad (4.7)$$

$$p = \sum_{s=1}^m p_s \quad (4.8)$$

$$p = \sum_{s=1}^m p_s = \sum_{s=1}^m (\rho_s R_s) T = \rho(\xi_s) R(\xi_s) T$$

$$\forall R(\xi_s) = \frac{1}{M} \sum_s R_s M_s = \sum_s R_s \xi_s \quad (4.9)$$

$$\xi_s = \frac{m_s N_s}{\sum_{s=1}^m (m_s N_s)} = \frac{\rho_s}{\rho} \quad (4.10)$$

Bedingungen Die thermische Zustandsgleichung des Gasgemisches ist gültig **P. 7**, sofern alle Komponenten des Gases als thermisch ideales Gas angesehen werden können. Weiterhin muss der Druck des Gemisches der Summe der Partialdrücke der Komponenten entsprechen **P. 5**.

Abbildung des Wärmestroms durch die Temperatur

Die Wärmestromdichte \dot{q}_i wird abgebildet durch die Fourier'sche Wärmediffusionsgleichung Gl. 4.11. Der Materialkoeffizient ist die Wärmeleitfähigkeit λ . Sie ist eine Funktion der Zustandsgrößen Temperatur T , Druck p und im Stoff-System auch des Massenanteils ξ_s . Das treibende Potential wird durch den Temperaturgradienten $\partial T / \partial x_i$ dargestellt.

$$\dot{q}_i = -\lambda(T, p, \xi_s, \dots) \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (4.11)$$

Bedingungen Die Wärmeleitung muss nach dem Fourier'schen Ansatz **P. 6** mit isotroper Wärmeleitfähigkeit, die jedoch von Temperatur T , Druck p oder Massenanteil ξ_s abhängen kann, erfolgen.

Abbildung der Diffusionsgeschwindigkeit durch Massenanteil

Der Diffusionsmassenstrom j_{ab,x_w}^* der Gaskomponente a in Gaskomponente b eines binären Gemisches wird abgebildet durch die Fick'sche Stoffdiffusionsgleichung Gl. 4.12 für äquimolare, eindimensionale Teilchenleitung. Der Materialkoeffizient ist der Diffusionskoeffizient D . Er ist eine Funktion der Zustandsgrößen Temperatur T , Druck p und des Massenanteils ξ_a beziehungsweise des Molanteils x_a . Das treibende Potential wird durch den Massenanteilsgradienten $\partial \xi_a / \partial x_w$ beziehungsweise Molgradienten $\partial x_a / \partial x_w$ dargestellt.

$$j_{ab,x_w}^* = -\rho D_{x_w}(T, x_a, \dots) \frac{dx_a}{dx_w} = \rho D_{x_w}(T, x_a, \dots) \frac{dx_b}{dx_w} = -j_{ba,x_w}^* \quad (4.12)$$

$$x_a \equiv \xi_a \quad \forall m_a = m_b \quad (4.13)$$

Bedingungen Die Stoffleitung erfolgt nach dem Fick'schen Ansatz als eindimensionale, äquimolare Diffusion. Hierzu müssen die Teilchen der Komponenten gleiche Massen m_s besitzen **P. 18**, um die Druckdiffusion ausschließen zu können oder es muss ein isobares Feld vorliegen **P. 19**. Weiterhin dürfen auf alle Komponenten nur die gleichen Feldkräfte wirken, um die Feldkraftdiffusion ausschließen zu können **P. 22**. Ebenso muss das Strömungssystem entweder isotherm sein oder Thermodiffusionskoeffizienten aufweisen, die hinreichend klein sind, um die Thermodiffusion vernachlässigen zu können **P. 21**.

4.1.3. Gleichungen der SAM in absoluten Variablen

Durch die im 4. Schritt der Herleitung notwendigen Vereinfachungen der speziellen Erhaltungsgleichungen der inneren Energie (SEGI E) ergeben sich die Erhaltungsgleichungen des Heißgas-Systems zu Gl. 4.14 bis Gl. 4.17. Die Erhaltungsgleichungen des Stoff-Systems bleiben unverändert die speziellen Erhaltungsgleichungen des zweikomponentigen Gases Gl. 4.18 bis Gl. 4.21.

Bedingungen Die Gleichungen des Heißgas-Systems der SAM Gl. 4.14 bis Gl. 4.17 sind gültig, wenn das Fluid des Heißgas-Systems divergenzfrei **P. 16** und daraus folgernd auch inkompressibel **P. 12** ist. Weiterhin muss die Wärmeleitung wesentlich größer sein als die Dissipation **P. 15**.

4.1.4. Gleichungen der SAM in dimensionslosen Variablen

Ziel des 5. Schritts der Herleitung ist es, dimensionslose Erhaltungsgleichungen der SAM zu gewinnen, deren Variablen und differentiellen Ausdrücke in der Größenordnung von Eins $\mathcal{O}() = 1$ liegen. Allein die Koeffizienten der Gleichungen sind

Heißgas-System

Masse

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i} \stackrel{!}{\rightarrow} 0 \quad (4.15)$$

Impuls

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dw_j}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta(T, p, \dots)) \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right] \\ &\quad + \eta(T, p, \dots) \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_i^2} - \frac{\partial p}{\partial x_j} + k_j \rho \end{aligned} \quad (4.16)$$

Energie

$$\rho \frac{D}{Dt} (c_{v,s}(\rho_s) T) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda(T, p, \dots) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (4.17)$$

Stoff-System

Masse

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{mit} \quad \rho = \rho_a + \rho_b \quad (4.18)$$

Massen

$$\begin{aligned} \rho \frac{D\xi_a}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho D_{x_w}(T, \xi_a, \dots) \frac{d\xi_a}{dx_w} \right) \\ &= - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho D_{x_w}(T, \xi_b, \dots) \frac{d\xi_b}{dx_w} \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Impuls

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dw_j}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta(T, p, \xi_a, \dots) \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right) \\ &\quad - \frac{\partial p}{\partial x_j} + k_j \rho \end{aligned} \quad (4.20)$$

Energie

$$\begin{aligned} \rho \frac{D}{Dt} (c_v(\rho_s, \xi_s) T) &= \underbrace{\left[c_{v,a} T_a - c_{v,b} T_b \right] \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho D_{x_w}(T, \xi_a, \dots) \frac{d\xi_a}{dx_w} \right)}_{\text{molarer Transport}} \\ &\quad + \eta(T, p, \xi_a, \dots) \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \\ &\quad - p \frac{\partial w_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda(T, p, \xi_a, \dots) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (4.21)$$

dann maßgebend. Über sie wird dann in Kap. 4.2 abgeschätzt, welcher physikalischer Mechanismus im Heißgas- und Stoff-System relevant ist für den Erhalt von Masse, Impuls und Energie. Auf Basis dieser Abschätzung wird anschließend das Zutreffen einiger Postulate und die Vergleichbarkeit beider Systeme diskutiert.

4.1.5. Entdimensionierung der Gleichungen der SAM

Mit den bereits getroffenen Annahmen ist die Grundlage der WSA Gl. 4.22 erfüllt. Die Energieerhaltungsgleichung des Heißgas-Systems Gl. 4.17 ist in der gleichen Form wie die Massenerhaltungsgleichung einer Komponente des Stoff-Systems Gl. 4.19.

$$\frac{DG}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(K(s, x_i) \frac{\partial s}{\partial x_i} \right) \quad (4.22)$$

Allerdings gilt diese nur, solange die räumliche Verteilung des Gradienten vom Produkt aus Diffusionskoeffizient und Massendichte mit der räumlichen Verteilung des Gradienten der Wärmeleitfähigkeit übereinstimmt Gl. 4.23.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (D \rho) \equiv \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \quad (4.23)$$

Die Erhaltungsgleichungen der Masse von Heißgas- und Stoff-System allerdings entsprechen sich nicht. Das Heißgas-System muss im Gegensatz zum Stoff-System divergenzfrei und damit inkompressibel sein. Weiterhin unterscheiden sich zwischen Heißgas- und Stoff-System die Erhaltungsgleichungen der inneren Energie. Beides beeinflusst die WSA indirekt, da im Heißgas- und Stoff-System unterschiedliche, zeitabhängige Felder der Zustandsgrößen Temperatur T , Druck p und im Falle des Stoff-Systems auch des Massenanteils ξ_a vorliegen können. Die Koeffizienten der Materialgleichungen, wie die dynamische Viskosität η , der Diffusionskoeffizient D und die Wärmeleitfähigkeit λ sind Funktionen dieser Zustandsgrößen. Als Folge können sich die räumlichen und zeitlichen Verteilungen der Koeffizienten im expliziten Heißgas-System unterscheiden von denen im Stoff-System. Daher kann die WSA formal vorliegen, das explizite Verhalten des Heißgas- und des Stoff-Systems ist aber nicht zwangsläufig gleich. Das Ziel der SAM, im Stoff- und Heißgas-System dieselben Strömungseigenschaften zu generieren, um Erkenntnisse übertragen zu können, ist dann nicht erreicht. Hierzu müssen, neben den jeweiligen Impulserhaltungsgleichungen auch die jeweiligen Energieerhaltungen auf identischen Mechanismen beruhen. Das Stoff-System ist im Gegensatz zum Heißgas-System aber nicht dissipationsfrei und enthält weiterhin den molaren Transport für Energie. Beide Eigenschaften sind zudem räumlich und zeitlich variabel. Um die Vergleichbarkeit zu erfüllen, müssen sie einen vernachlässigbar kleinen Einfluss haben, was nicht a priori postuliert werden kann, für die SAM jedoch notwendig ist. Eine Abschätzung der Vergleichbarkeit lässt sich allerdings durch die Betrachtung der Koeffizienten der entdimensionierten Gleichungen der SAM durchführen. Es handelt sich dabei nur um eine Abschätzung, da die Abhängigkeiten der Koeffizienten von den räumlich und zeitlich variablen Zustandsgrößen

vernachlässigt werden, wodurch Gl. 4.24 P. 13, P. 14, P. 20 und Gl. 4.25 gelten. Weiterhin verlangt die Konstanz der Massendichte Gl. 4.25 bei der sich ergebenden Inkompressibilität Gl. J.3 im Heißgas-System, dass dieses zeitlich unveränderlich, also stationär ist Gl. 4.26 P. 10. Um die Vergleichbarkeit zu ermöglichen, muss das Stoff-System daher auch zeitinvariant sein.

$$\partial D_{x_w} \stackrel{!}{=} \partial \eta \stackrel{!}{=} \partial \lambda \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.24)$$

$$\partial \rho \stackrel{!}{=} 0 \quad (4.25)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (4.26)$$

Die Entdimensionierung der Gleichungen der SAM stellt eine Transformation dar, die die dimensionsbehafteten Variablen durch dimensionslose substituiert. Es entstehen neue Koeffizienten, die sogenannten dimensionslosen Kennzahlen. Die dimensionslose Form der Gleichungen ist vorteilhaft, da die Vergleichbarkeit zweier expliziter Strömungssysteme gegeben ist, wenn die auftretenden dimensionslosen Kennzahlen gleiche Werte haben. Gleichgroße Kennzahlen sind daher die Bedingungen zur Vergleichbarkeit expliziter Systeme. Weiterhin können Terme der Gleichungen, also physikalische Mechanismen, vernachlässigt werden, wenn deren Koeffizienten deutlich kleiner sind als die restlichen.

Durch die getroffenen Vereinfachungen von inkompressiblem und isoviskosem Verhalten existiert nur noch eine Variable, die Massenkraft k_j , deren räumliche Verteilung zur Transformation bekannt sein muss. Daher hängt die Vergleichbarkeit der Systeme unmittelbar mit der Massenkraftverteilung zusammen. Zwei Grenzfälle der Massenkraft treten üblicherweise bei technischen Strömungen auf.

In einem Fall, nachfolgend GF I genannt, wirkt nur die konstant gesetzte Gravitation. Im anderen Fall, im Weiteren als GF II bezeichnet, wird die Gravitation vernachlässigt gegenüber den räumlich variablen Scheinkräften, wie die Zentrifugal- und Coriolis-Kraft bei stationär rotierenden, unbeschleunigten Systemen. Beide Fälle sind bei der Untersuchung von Innenkühlungen von Turbinenschaufeln relevant. Grenzfall I repräsentiert das Strömungsverhalten in Kühlkanälen nicht drehender Turbinenschaufeln, zum Beispiel den Statorschaufeln. Der Grenzfall II gibt das Strömungsverhalten in Kühlkanälen von drehenden Turbinenschaufeln wieder. Er ist daher relevant für die Kühlung von Turbinenrotorschaufeln. In beiden Fällen entstehen unterschiedliche, dimensionslose Kennzahlen und damit auch unterschiedliche Bedingungen zur Vergleichbarkeit, wodurch die Grenzfälle I und II gegenseitig nur dann ähnlich sind, wenn die Massenkraft und die Scheinkräfte vernachlässigt werden können. Dahingegen müssen zur Vergleichbarkeit von zwei expliziten Systemen des gleichen Grenzfalles nur die Kennzahlen von gleicher Größe sein. Um die Vergleichbarkeit von Heißgas- und Stoff-System im jeweiligen Grenzfall abschätzen zu können, werden die Gleichungen der SAM für beide Grenzfälle getrennt spezifiziert und entdimensioniert.

Entdimensionierung der Gleichungen der SAM - Grenzfall I

Für eine Strömung von hinreichend geringer Ausdehnung, beschrieben in inertialen Koordinaten, also ein stehendes System, ist die Massenkraft räumlich konstant und gleich der Gravitationsfeldkonstante g . In diesem Fall führt die Entdimensionierung der Massenkraft zu einer dimensionslosen Kennzahl, der Froude-Zahl Fr Gl. 4.39. Die Grundschrte der entdimensionierenden Transformation werden nachstehend kurz aufgezeigt. Zur Transformation mit dimensionslosen Größen werden folgende Substitutionen verwendet:

$$w_i \rightarrow \bar{w} \cdot w_{char} \quad (4.27)$$

$$x_i \rightarrow \bar{x}_i \cdot L_{char} \quad (4.28)$$

$$t \rightarrow \bar{t} \cdot \frac{L_{char}}{w_{char}} \quad (4.29)$$

$$\xi_a \rightarrow \bar{\xi}_a \cdot \Delta \xi_a \quad (4.30)$$

$$\rho_a = \rho \xi_a \rightarrow \bar{\xi}_a \cdot \rho \Delta \xi_a \quad (4.31)$$

$$p \rightarrow \bar{p} \cdot \rho g L_{char} \quad (4.32)$$

$$T \rightarrow \bar{T} \cdot \Delta T + T_{ref} \quad (4.33)$$

sowie zur formalen Vereinfachung:

$$c_{v,a} T_a - c_{v,b} T_b \rightarrow \Delta u_{ab} \quad (4.34)$$

Weiterhin werden die noch dimensionsbehafteten und teilweise als charakteristisch bezeichneten Größen durch die dimensionslosen Kennzahlen Gl. 4.35 bis Gl. 4.40 substituiert, wobei die spezifische isobare Wärmekapazität c_p durch den Isentropenexponenten κ (siehe Gl. H.20) und der spezifischen isochoren Wärmekapazität c_v ersetzt wird.

$$Re = \frac{\rho w_{char} L_{char}}{\eta} \quad (4.35)$$

$$Ec = \frac{w_{char}^2}{c_p \Delta T} = \frac{w_{char}^2}{\kappa c_v \Delta T} \quad (4.38)$$

$$Sc = \frac{\eta}{D \rho} \quad (4.36)$$

$$Fr = \frac{w_{char}}{\sqrt{g L_{char}}} \quad (4.39)$$

$$Pr = \frac{\eta c_p}{\lambda} = \frac{\eta \kappa c_v}{\lambda} \quad (4.37)$$

$$KI = \frac{\Delta \xi_a \Delta u_{ab}}{\Delta T c_v} \quad (4.40)$$

Die bei der Transformation auftretenden Größen haben folgende Bedeutungen:

\bar{w}	dimlos. Geschwindigkeit	ΔT	char. Temperaturdifferenz
\bar{x}_i	dimlos. Raumkoordinate	Δu_{ab}	Netto mol. Energiestranport
\bar{t}	dimlos. Zeit		
$\bar{\zeta}_a$	dimlos. Massenanteil	Re	Reynolds-Zahl
\bar{p}	dimlos. Druck	Sc	Schmidt-Zahl
\bar{T}	dimlos. Temperatur	Pr	Prandtl-Zahl
w_{char}	char. Geschwindigkeit	Ec	Eckert-Zahl
L_{char}	char. Länge	Fr	Froude-Zahl
$\Delta \bar{\zeta}_a$	char. Massenanteilsdifferenz	KI	Rel. mol. Energietransport

Durch die entdimensionierende Transformation nehmen die Gleichungen der SAM die dimensionslose Form Gl. 4.41 bis Gl. 4.48 an.

Bedingungen Die entdimensionierten Gleichungen der SAM für den Grenzfall I sind gültig, wenn im jeweiligen System die Massendichte räumlich und zeitlich konstant ist **P. 10**. Weiterhin dürfen die Viskosität **P. 13** und die Wärmeleitfähigkeit **P. 14** im jeweiligen System nicht räumlich variieren. Der Diffusionskoeffizient im Stoff-System muss ebenfalls räumlich konstant sein **P. 20**.

Entdimensionierung der Gleichungen der SAM - Grenzfall II

Für die Beschreibung einer Strömung in relativen Koordinaten eines bewegten Systems treten weitere Terme in der gekoppelten Impulserhaltungsgleichung im Vergleich zum inertialen System auf (vergleiche Gl. 4.52 und Gl. 4.20). Diese sind die Führungskraft Gl. 4.49, die Coriolis-Kraft Gl. 4.50 und die Zentrifugalkraft Gl. 4.51. Üblicherweise werde sie als Scheinkräfte bezeichnet. In den gekoppelten Massen- und Energieerhaltungsgleichungen kommen diese Scheinkräfte nicht vor und lassen die Gleichungen unbeeinflusst¹. Daher ist die Transformation von Massen- und Energieerhaltungsgleichung ein einfaches Ersetzen der bisherigen, inertialen Raumkoordinaten x_i in relative x'_i , sowie die inertialen Geschwindigkeiten w_i in relative u_i . Die etwas aufwändigere Transformation der Impulserhaltungsgleichung hingegen wird in Anh. L gezeigt und führt auf Gl. 4.52². Hierin zeigt $|_R$ an, dass die Gleichung in Größen des Relativsystems ausgedrückt ist.

$$-\rho \vec{a} \quad : \text{Führungskraft} \quad (4.49)$$

$$-\rho 2\vec{\omega} \times \vec{u} \quad : \text{Coriolis-Kraft} \quad (4.50)$$

$$-\rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) \quad : \text{Zentrifugalkraft} \quad (4.51)$$

¹Dahingegen treten diese Scheinkräfte bei den allgemeinen Erhaltungsgleichungen sehr wohl auf.

²Die vektorielle Schreibweise ist aus formalen Gründen gewählt worden.

$$\begin{array}{c} \text{Heißgas-System} \\ \text{Masse} \\ \frac{D\rho}{D\bar{t}} + \rho \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \bar{x}_i} = 0 \end{array} \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \bar{x}_i} \stackrel{!}{\rightarrow} 0 \quad (4.42)$$

$$\begin{array}{c} \text{Impuls} \\ \frac{D\bar{w}_j}{D\bar{t}} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{w}_j}{\partial \bar{x}_i^2} + \frac{1}{Fr^2} \left[1 - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_j} \right] \end{array} \quad (4.43)$$

$$\begin{array}{c} \text{Energie} \\ \frac{D\bar{T}}{D\bar{t}} = \frac{\kappa}{Re Pr} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}_i^2} \end{array} \quad (4.44)$$

$$\begin{array}{c} \text{Stoff-System} \\ \text{Masse} \\ \frac{D\rho}{D\bar{t}} + \rho \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \bar{x}_i} = 0 \end{array} \quad (4.45)$$

$$\begin{array}{c} \text{Massen} \\ \frac{D\bar{\xi}_a}{D\bar{x}_i} = \frac{1}{Re Sc} \frac{d^2 \bar{\xi}_a}{d\bar{x}_w^2} \end{array} \quad (4.46)$$

$$\begin{array}{c} \text{Impuls} \\ \frac{D\bar{w}_j}{D\bar{t}} = \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \bar{w}_j}{\partial \bar{x}_i^2} + \frac{1}{Fr^2} \left[1 - \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}_j} \right] \end{array} \quad (4.47)$$

$$\begin{array}{c} \text{Energie} \\ \frac{D\bar{T}}{D\bar{t}} = \frac{KI}{Re Sc} \frac{d^2 \bar{\xi}_a}{d\bar{x}_w^2} + \frac{\kappa Ec}{Re} \left[\frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \bar{x}_j} + \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial \bar{x}_i} \right] \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial \bar{x}_i} + \frac{\kappa}{Re Pr} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}_i^2} \end{array} \quad (4.48)$$

$$\left. \frac{D\vec{u}}{Dt} \right|_R = \vec{k} - \vec{a} - 2\vec{\omega} \times \vec{u} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) - \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{x} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (4.52)$$

entspricht Gl. L.10

Im Falle einer stationären Drehung um beliebig viele Achsen $\vec{\omega}$ (Gl. 4.53) und bei vernachlässigbaren Massenkräften k_i und Translationsbeschleunigung \vec{a} (Gl. 4.54), reduzieren sich die Terme auf die Zentrifugal- und die Coriolis-Kraft sowie die Spannungen. Die Impulserhaltungsgleichung nimmt dann die Form Gl. 4.55 an.

$$\text{Stationäre Rotation:} \quad d\vec{\omega} \rightarrow 0 \quad (4.53)$$

$$\text{Dominanz Scheinkräfte:} \quad |\vec{k} - \vec{a}| \ll |2\vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x})| \quad (4.54)$$

$$\Rightarrow \left. \frac{D\vec{u}}{Dt} \right|_R = -2\vec{\omega} \times \vec{u} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (4.55)$$

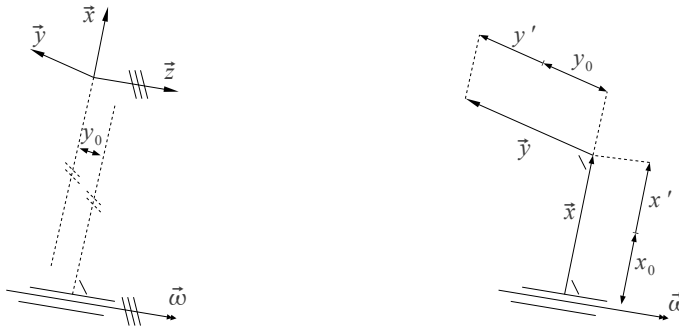
Weiterhin ist bei vielen technischen Systemen, wie auch bei Turbomaschinen, die Drehung eindimensional. Das System rotiert nur um eine Achse. Es ist daher zur Entdimensionierung sinnvoll, die Impulserhaltungsgleichung für jede Raumrichtung als getrennte Gleichung aufzustellen.

$$\begin{array}{ll} \vec{\omega} \parallel \vec{z} & \vec{u} = (u, v, w)^T \\ \vec{x} \perp \{\vec{y} \wedge \vec{\omega}\} & \vec{\omega} = (0, 0, \omega)^T \\ \vec{y} \perp \vec{\omega} & \vec{x} = (x, y, z)^T \end{array} \quad (4.56)$$

Mit der Koordinatendefinition Gl. 4.56 (siehe auch Abb. 4.2a) folgt dann das Dreigleichungssystem der Impulserhaltung Gl. 4.57 für den GF II. Die dazu verwendeten algebraischen Schritte finden sich in Anh. M.

$$\begin{array}{ll} \text{x-Richtung:} & \left. \frac{Du}{Dt} \right|_R = +2\omega v + \omega^2 x + \frac{\eta}{\rho} \Delta u - \frac{1}{\rho} \nabla p \\ \text{y-Richtung:} & \left. \frac{Dv}{Dt} \right|_R = -2\omega u + \omega^2 y + \frac{\eta}{\rho} \Delta v - \frac{1}{\rho} \nabla p \\ \text{z-Richtung:} & \left. \frac{Dw}{Dt} \right|_R = \frac{\eta}{\rho} \Delta w - \frac{1}{\rho} \nabla p \end{array} \quad (4.57)$$

Fällt der Koordinatenursprung mit der Drehachse zusammen, so führt die Entdimensionierung der Impulserhaltungsgleichung zu zwei dimensionslosen Kennzahlen, der Reynolds-Zahl Re Gl. 4.35 sowie der Rotationszahl Ro Gl. 4.58. Die Froude-Zahl ent-



(a) Koordinatendefinition bei Grenzfall II

(b) Trennung der Koordinaten

Abbildung 4.2.: Definitionen der Koordinaten

fällt, da die Massenkräfte der Gravitation vernachlässigt wurden.

$$Ro = \frac{\omega^2 L_{char}}{\omega \omega_{char}} : \text{Rotationszahl} \quad (4.58)$$

Es ist jedoch oft technisch notwendig und gewollt, dass die Strömung in einem exzentrischen Koordinatensystem beschrieben wird. Dieses ist unter anderem der Fall, wenn ein Vergleich der Strömungen durch eine Kanalgeometrie konstanter Größe, die bei unterschiedlichen Drehradien platziert wird, durchgeführt werden soll. Weiterhin ist die Notwendigkeit eines exzentrischen Koordinatensystems gegeben, wenn sich Strömungen durch eine Geometrie bei unterschiedlichen Größen aber gleichen Drehradien identisch verhalten sollen. Daher benötigt auch die Vergleichbarkeit von Strömungen durch unterschiedlich große Kanalgeometrien und gleichzeitig unterschiedlichen Drehradien zwingend exzentrische Koordinaten. In all diesen Fällen liegt also eine geometrische Skalierung vor. Bei der experimentellen Umsetzung der SAM ist diese Skalierung fast immer gegeben, da für die NSM eine Vergrößerung der Kanalgeometrie im Vergleich zur technischen Anwendung oft unumgänglich ist. Die Transformation der Impulserhaltungsgleichung in ein exzentrisches Koordinatensystem erfolgt durch die Trennung in Inertial- und Relativkoordinaten gemäß Gl. 4.59 (siehe auch Abb. 4.2b). Diese Vorgehensweise ermöglicht die Drehradien x_0, y_0 getrennt vom Strömungskanal x', y', z' zu skalieren.

$$x \rightarrow x_0 + x' \quad y \rightarrow y_0 + y' \quad z \rightarrow z' \quad (4.59)$$

Die Grundschrte der entdimensionierenden Transformation werden nachstehend aufgezeigt. Das genaue Vorgehen ist in Anh. N angegeben. Zur entdimensionierenden

Transformaiton werden die folgenden Größen verwendet:

$$x' \rightarrow \bar{x}' L_{char} \quad (4.60)$$

$$y' \rightarrow \bar{y}' L_{char} \quad (4.61)$$

$$z' \rightarrow \bar{z}' L_{char} \quad (4.62)$$

$$u \rightarrow \bar{u} u_{char} \quad (4.63)$$

$$v \rightarrow \bar{v} u_{char} \quad (4.64)$$

$$w \rightarrow \bar{w} u_{char} \quad (4.65)$$

$$x_0 \rightarrow \bar{x}_0 L_{char} \quad (4.66)$$

$$y_0 \rightarrow \bar{y}_0 L_{char} \quad (4.67)$$

$$p \rightarrow \bar{p} \cdot \rho \omega^2 L_{char}^2 \quad (4.68)$$

$$t \rightarrow \bar{t} \cdot \frac{L_{char}}{u_{char}} \quad (4.69)$$

Die dann noch dimensionsbehafteten und teilweise charakteristischen Größen werden durch vier dimensionslose Kennzahlen Gl. 4.70 bis Gl. 4.73 und je zwei dimensionslose Geschwindigkeiten \bar{u} , \bar{v} und dimensionslose Raumkoordinaten \bar{x}' , \bar{y}' substituiert.

$$Re_x = \frac{u_{char} \rho_0 L_{char}}{\eta_0} \quad (4.70)$$

$$Ro_x = \frac{\omega L_{char}}{u_{char}} \quad (4.71)$$

$$Ro_{x_0} = \frac{\omega x_0}{u_{char}} \quad (4.72)$$

$$Ro_{y_0} = \frac{\omega y_0}{u_{char}} \quad (4.73)$$

Neben den bereits in Kap. 4.1.5 benannten Größen, haben die in dieser Transformation zusätzlich auftretenden Größen folgende Bedeutung:

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$	dimlos. Relativgeschwindigkeiten in x-, y-, z-Richtung
$\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'$	dimlos. Raumkoordinaten des Relativsystems
u_{char}	char. Relativgeschwindigkeit
Re_x	Reynolds-Zahl mit charakteristischer Länge
Ro_x	Rotationszahl mit charakteristischer Länge
Ro_{x_0}	Rotationszahl mit Exzentrizität in x-Richtung
Ro_{y_0}	Rotationszahl mit Exzentrizität in y-Richtung

Das dimensionslose Dreigleichungssystem zur Erhaltung des Impulses folgt zu Gl. 4.74. Die Erhaltungsgleichungen von Masse, Energie sowie beim Stoff-System zusätzlich noch der Komponentenmasse, sind mit den bisherigen Formulierungen (Gl. 4.41, Gl. 4.45, Gl. 4.44, Gl. 4.48, Gl. 4.46) identisch. Lediglich müssen, wie bereits oben erwähnt, die inertialen Raumkoordinaten x_i durch relative x'_i , sowie die inertiale

Geschwindigkeiten w_i durch relative u_i ersetzt werden.

$$\begin{aligned}
 \text{x-Richtung: } \left. \frac{D\bar{u}}{DT} \right|_R &= +2Ro_x\bar{v} + Ro_xRo_{x_0} + Ro_x^2\bar{x}' + \frac{1}{Re_x}\Delta\bar{u} - \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} \\
 \text{y-Richtung: } \left. \frac{D\bar{v}}{DT} \right|_R &= -2Ro_x\bar{u} + Ro_xRo_{y_0} + Ro_x^2\bar{y}' + \frac{1}{Re_x}\Delta\bar{v} - \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}} \\
 \text{z-Richtung: } \left. \frac{D\bar{w}}{DT} \right|_R &= +\frac{1}{Re_x}\Delta\bar{w} - \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}}
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

Bedingungen Die entdimensionierten Gleichungen der SAM für den GF II sind gültig für stationär um eine Achse rotierende Relativsysteme **P. 23**, wenn in diesen die Massendichte, die Viskosität und die Wärmeleitfähigkeit räumlich und zeitlich konstant sind, **P. 10**, **P. 13**, **P. 14**. Der Diffusionskoeffizient im Stoff-System darf ebenfalls nicht räumlich variieren **P. 20**. Ferner müssen die Massenkräfte sowie die Beschleunigung gegenüber der Zentrifugal- und Coriolis-Kraft vernachlässigt werden können **P. 24**.

4.1.6. Postulate zur Gewinnung der Gleichungen der SAM

Alle zur Herleitung der entdimensionierten Gleichungen der SAM getroffenen Annahmen werden im Folgenden nochmals zur Übersicht verbal formuliert aufgelistet und zur späteren Bezugnahme nummeriert. Die Diskussion jedes Postulats erfolgt anschließend in Kap. 4.2.

Heißgas- und Stoff-System

- | | |
|---|--|
| P.1 Nichtrelativistische Mechanik: Erhaltung von Masse, Impuls und Energie | P.8 Kalorisch ideale Gase |
| P.2 Drehimpulserhaltung | P.9 Inerte, dissoziationsfreie Spezies |
| P.3 Isotropes Hooke'sches Gesetz | P.10 Stationäre Massendichte |
| P.4 Stoke'sche Hypothese | P.11 Kugelförmige Teilchen, nur drei translatorische Freiheitsgrade |
| P.5 Gesetz von Dalton | P.12 Inkompressibel |
| P.6 Fourier'sche Wärmeleitung | P.13 Isoviskos: räumlich |
| P.7 Thermisch ideale Gase | P.14 Isowärmeleitfähigkeit: räumlich |

Heißgas-System

- P.15** Vernachlässigbare Dissipation
P.16 Divergenzfreie Geschwindigkeit:
 Druckterm in Energieerhaltung des
 Heißgas-Systems

Grenzfall II

- P.23** Stationäre Rotation
P.24 Dominanz von Zentrifugal- und
 Coriolis-Kraft

Stoff-System

- P.17** Gleich große Teilchen
P.18 Gleich schwere Teilchen zur verein-
 fachten Fick'schen Diffusion
P.19 Gleich schwere Teilchen oder isobar
 zur Vernachlässigung der Druckdif-
 fusion
- P.20** Isodiffusionskoeffizient: räumlich
P.21 Vernachlässigbarer Thermodiffusi-
 onskoeffizient oder isotherm
P.22 Komponentenunabhängige Massen-
 kräfte

4.2. Unsicherheit der SAM

Die getroffenen Annahmen können die Aussagefähigkeit der SAM maßgeblich verringern, wenn Postulate und Realbedingung inkongruent sind. Ist die Übereinstimmung der Postulate mit den real vorliegenden Bedingungen nicht oder nur zum Teil gegeben, so werden experimentell beobachtete Effekte missinterpretiert, da es nicht möglich ist, den Einfluss dieser Inkongruenz zu identifizieren oder gar herauszurechnen. Der einzig praktikable Weg, derartig bedingte Fehlinterpretationen zu verhindern, ist das bewusste Ausschließen von Messungen bei hinreichend unzutreffenden Annahmen. Es bedarf daher einer, wenn möglich quantitativen Abschätzung des jeweiligen Postulats bei den Bedingungen eines expliziten Falls. Die ausreichende Gültigkeit einiger Annahmen zeigt die Erfahrung bei einer Vielzahl von Experimenten. Es sind die grundlegenden Postulate **P. 1** bis **P. 9**, sowie **P. 22**. Diese Annahmen gelten hier als zutreffend und werden nicht näher betrachtet. Die Gültigkeit der verbleibenden Postulate wird im Folgenden diskutiert.

4.2.1. Bedingungen der stationären Massendichte

Eine elementare Bedingung zur Gültigkeit der Gleichungen der SAM ist die Stationarität der Massendichte **P. 10**. Diese ist jedoch nicht a priori erfüllt, weder in den Experimenten unter den Bedingungen des Stoff-Systems noch in Experimenten oder technischen Anwendungen bei Bedingungen des Heißgas-Systems. Um diesbezüglich eine möglichst geringe Unsicherheit zu erreichen, sollten die Zustandsgrößen, die die Massendichte beeinflussen, wie die Temperatur und der Druck sowie im Stoff-System auch der Massenanteil, zeitlich konstant gehalten werden. Auswirkungen einer Nichterfüllung dieser Forderung können nicht allgemeingültig abgeschätzt werden.

4.2.2. Bedingungen der Inkompressibilität

Eine Bedingung zur Gültigkeit der Gleichungen der SAM ist die Inkompressibilität des Fluids P. 12 Gl. J.3. Hierfür existieren ein indirekter und ein direkter Grund.

Indirekter Grund - Divergenzfreiheit Beim Heißgas-System stammt die Inkompressibilität aus der Forderung nach Divergenzfreiheit P. 16. Diese ist formal notwendig, um in der Energieerhaltungsgleichung Gl. 4.44 den Druckterm zu eliminieren und sie mit der weiteren Annahme von Dissipationsfreiheit P. 15 in die analoge Form Gl. 4.22 zu bringen. Die Inkompressibilität Gl. J.3 ist daher nur eine Schlussfolgerung aus der Divergenzfreiheit und nicht eigentliche Bedingung.

Direkter Grund - Analogie Im Stoff-System folgt die Inkompressibilität aus der Notwendigkeit einer konstanten Massendichte Gl. 4.25, um die Massenerhaltung der Komponenten im Stoff-System Gl. 4.19 allgemeingültig in die analoge Form Gl. 4.22 zu bringen. Ist die Massendichte nicht konstant, so entsprechen sich Fick'sche Diffusion und Fourier'sche Wärmeleitung nur, wenn die räumliche Verteilung des Gradienten vom Produkt aus Diffusionskoeffizient und Massendichte mit der räumlichen Verteilung des Gradienten der Wärmeleitfähigkeit übereinstimmt Gl. 4.23. Dieser Sonderfall ist nicht trivial und muss in der Regel als unzureichend erfüllt angesehen werden. Die WSA ist dann nicht gegeben. Es ist daher zwingend eine räumlich nahezu inkompressible Strömung erforderlich. Trotzdem muss sich selbst dann der Diffusionskoeffizient D räumlich gleich verhalten wie die Wärmeleitfähigkeit λ . Auch dieses ist nicht trivial und wird in Kap. 4.2.5 diskutiert.

Inkompressibilitätsbedingungen Für eine Strömung, deren Temperaturfeld nur durch Eigenreibung variiert und nicht durch eine aufgeprägte Wärmeleitung, die keinen molaren Energietransport besitzt und die den Bedingungen des GF I unterliegt, ergeben sich nach [32] (S.157...159) zwei Inkompressibilitätsbedingungen Gl. 4.75 und Gl. 4.76.

$$Ma^2 \ll 1 \quad (4.75)$$

$$\frac{gL_{char}}{a^2} \ll 1 \quad (4.76)$$

Allerdings existiert im Heißgas-System ein ausgeprägtes Temperaturfeld und das Stoff-System weist molaren Energietransport auf. Ferner können beide Systeme rotieren, sodass der GF II vorliegt, bei dem die Gravitation g vernachlässigt wird, aber dafür die Scheinkräfte auftreten. Folglich sind beide Inkompressibilitätsbedingungen, Gl. 4.75 und Gl. 4.76, keine hinreichenden Bedingungen, um die Inkompressibilität abzuschätzen. Für die Systeme der SAM müssten neue Inkompressibilitätsbedingungen formuliert werden, in denen die Scheinkräfte und die Entropieänderung durch Wärmeleitung sowie molaren Energietransport Berücksichtigung finden. Zur Herleitung reichen jedoch die thermodynamischen Potenziale, die allgemeinen thermischen und kalorischen Zustandsgleichungen sowie die bereits angenommenen Materialgleichungen nicht aus. Es ließe sich nur zeigen, dass bei Wärmeleitung sowie

molarem Energietransport, in der Größenordnung der Dissipation, die Kompressibilität nicht vernachlässigt werden kann³. Das Postulat **P. 12** trifft daher in beiden Systemen nicht zu und der Einfluss dieses Widerspruchs lässt sich analytisch nicht allgemein abschätzen. Die Kompressibilität ist somit eine möglicherweise sehr große Unsicherheit bei der SAM, deren Auswirkungen auch nur schwer zu bestimmen sind, sowohl durch experimentelle als auch durch numerische Lösung der Gleichungen. Im Rahmen dieser Arbeit kann die Überprüfung des Postulats der inkompressiblen Strömung **P. 12** daher nicht erfolgen.

4.2.3. Einfluss von Divergenz, Dissipation und molarem Transport

Da die Inkompressibilität und die mit ihr verbundene Divergenzfreiheit nicht als zutreffend erachtet werden kann, müssen die vernachlässigten Terme der jeweiligen Gleichung in ihrer Größenordnung wesentlich kleiner sein als die restlichen Terme. Im Folgenden wird eine Abschätzung durchgeführt, um die Vernachlässigbarkeit von Dissipation und Druckterm, also jenem Term mit der Divergenz der Geschwindigkeit, gegenüber der Wärmeleitung zu überprüfen. Hierbei wird auch der molare Transport der Energie und seine Größenordnung berücksichtigt. Es ist zwar keine formal notwendige Bedingung, dass der nur im Stoff-System existente, molare Energietransport vernachlässigbar klein ist, jedoch erhöht dieses die Vergleichbarkeit von Heißgas- und Stoff-System, wenn dem so gegeben ist. Die Vernachlässigbarkeit von Dissipation, Druckterm und molarem Energietransport gegenüber dem Term der Wärmeleitung in der Energieerhaltung lässt sich durch eine geeignete Entdimensionierung abschätzen. Hierzu wird die gekoppelte Energieerhaltungsgleichung des Stoff-Systems Gl. 1.7, welche noch die Dissipation, die Divergenz und den molaren Energietransport enthält, mit den Annahmen Gl. 4.24 und Gl. 4.25 vereinfacht. Zur Entdimensionierung werden die bereits angegebenen Transformationen verwendet, mit Ausnahme bei der Variable des Drucks p (Gl. 4.32 und Gl. 4.68). Dieser wird für den jeweiligen Grenzfall mit Gl. 4.77 oder Gl. 4.78 entdimensioniert, um für den dimensionslosen Druck die Größenordnung von Eins zu erhalten.

$$p \rightarrow \bar{p}\rho L_{char}g \quad \text{GF I} \quad (4.77) \qquad r_{char} \approx x_0 \wedge \approx y_0 \quad (4.79)$$

$$p \rightarrow \bar{p}\rho\omega^2 r_{char}^2 \quad \text{GF II} \quad (4.78) \qquad Ro_r = \frac{\omega r_{char}}{w_{char}} \quad (4.80)$$

Die dimensionslose Energieerhaltungsgleichung folgt für den GF I zu Gl. 4.81 und für den GF II zu Gl. 4.82. Zu beachten ist hierbei dass $\bar{G}(\bar{x}^{-2}, \bar{w}^2)$ nach Gl. J.6 definiert ist und die inertialen Geschwindigkeiten w durch relative u ersetzt werden können.

³Der Beweis wird hier nicht geführt. Allerdings findet sich dieselbe Aussage verbal formuliert in [32] S.157

$$\begin{aligned}
\frac{D\bar{T}}{D\bar{t}} &= \frac{\kappa Ec}{Re} \bar{G}(\bar{x}^{-2}, \bar{w}^2) \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial \bar{x}_i} + \frac{\kappa}{Re Pr} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}_i^2} + \frac{KI}{Re Sc} \frac{d^2 \bar{\xi}_a}{d\bar{x}_w^2} - \frac{\kappa Ec}{Fr^2} \bar{p} \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \bar{x}_i} \\
\frac{D\bar{T}}{D\bar{t}} &= \frac{\kappa Ec}{Re} \bar{G}(\bar{x}^{-2}, \bar{w}^2) \frac{\partial \bar{w}_j}{\partial \bar{x}_i} + \frac{\kappa}{Re Pr} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}_i^2} + \frac{KI}{Re Sc} \frac{d^2 \bar{\xi}_a}{d\bar{x}_w^2} - Ro_7^2 \kappa Ec \bar{p} \frac{\partial \bar{w}_i}{\partial \bar{x}_i}
\end{aligned} \tag{4.81}$$

(4.82)

Die Größenordnungen aller dimensionslosen Variablen und deren Differentiale entsprechen etwa Eins, sofern für die charakteristischen Größen zutreffende Werte eingesetzt werden. Diese sind:

- $L_{char} \approx$ Grenzschichtdicke (Geschwindigkeit, Temperatur, Konzentration)
- $r_{char} \approx$ Drehradius
- $w_{char} \approx$ Geschwindigkeit am Rand der Geschwindigkeitsgrenzschicht
- $\Delta T \approx$ Temperaturdifferenz über die Temperaturgrenzschicht
- $\Delta \xi_a \approx$ Massenanteilsdifferenz über die Konzentrationsgrenzschicht

Zur Verdeutlichung wie entscheidend die Wahl der charakteristischen Werte ist, sei hier beispielhaft der Geschwindigkeitsgradient $\partial w_j / \partial x_i$ betrachtet. Der maximal in einem expliziten System vorkommende, dimensionsbehaftete Geschwindigkeitsgradient ist im Allgemeinen unbekannt. Er lässt sich jedoch von der Größenordnung abschätzen, indem die maximal vorkommende Geschwindigkeitsänderung bezogen wird auf die räumliche Länge in der diese Änderung erfolgt. Die maximal zu erwartende Geschwindigkeitsänderung ist jene, die sich zwischen Wand und dem äußeren Rand der Geschwindigkeitsgrenzschicht, dem Fernfeld, einstellt (veranschaulicht in Abb. 4.3b). Ihr Wert entspricht daher der charakteristischen Geschwindigkeit $\partial w \approx w_{char} \approx u_\infty - 0$. Die räumliche Länge, auf der diese Geschwindigkeitsänderung stattfindet, ist die Dicke der Geschwindigkeitsgrenzschicht $\delta_u \equiv \delta_{u,99}$. Durch die Entdimensionierung mit diesen charakteristischen Größen liegt der dimensionslose Geschwindigkeitsgradient $\partial \bar{w}_j / \partial \bar{x}_i$ in der Größenordnung von Eins. Zu beachten ist hierbei, dass dieses eine lineare Abschätzung ähnlich der Filmtheorie ist und Fälle eintreten können, in denen der maximal auftretende Geschwindigkeitsgradient größer ist als die Abschätzung. Oft trifft dieses auf jenen Gradienten nahe einer Wand zu. In Abb. 4.3b ist hierzu beispielhaft eine Überhöhung von etwa 8,59 maßstäblich zur linearen Abschätzung dargestellt. Diese Überhöhung wird in technisch relevanten Systemen selten einen Faktor größer 10 erreichen, da sie nur bei annähernd idealen Blockprofilen der Geschwindigkeit auftritt. Die Wahl der charakteristischen Länge zur Grenzschichtdicke wird auch für die Geschwindigkeitsdivergenz $\partial w_i / \partial x_i$ getroffen, obwohl die räumliche Länge, auf der diese Geschwindigkeitsänderung stattfindet, eine a priori unbekannte Erstreckung auf der Stromlinie ist. Allerdings wird diese in derselben Größenordnung liegen wie die Dicke der Geschwindigkeitsgrenzschicht, zumindest im Bereich größerer Grenzschichtänderungen, wie er in Abb. 4.3a als Einlaufströmung beispielhaft skizziert ist. Ein derartiger Bereich dürfte in fast allen technischen Strömungen existieren, sodass die Wahl der Grenzschichtdicke als charakteristische Länge

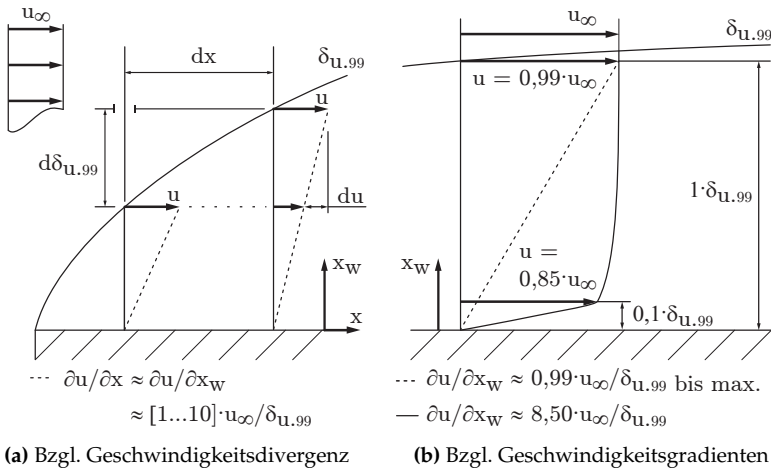


Abbildung 4.3.: Verdeutlichung der Größen zur Abschätzung

auch die Geschwindigkeitsdivergenz zu einer Größenordnung von Eins entdimensioniert. Wird hingegen eine deutlich von der Grenzschichtdicke verschiedene Länge als charakteristische Länge verwendet, verfälscht diese die Abschätzung inakzeptabel. In manchen Fällen ist bereits der hydraulische Durchmesser oder die Wandkoordinate x eines Strömungskanals deutlich größer als die Grenzschichtdicke und daher ungeeignet für eine Entdimensionierung mit dem Ziel der Größenordnungsabschätzung von Termen in den beschreibenden Gleichungen.

Abschätzung für das Heißgas-System Die Änderung der inneren Energie darf im Heißgas-System nur durch die Wärmeleitung erfolgen, damit die WSA gültig ist. Folglich muss zur Vernachlässigbarkeit der Dissipation die Bedingung Gl. 4.83 erfüllt sein. Um die Änderung der inneren Energie durch den Druck gegenüber jener durch Wärmeleitung als verschwindend klein ansehen zu können, ist im Grenzfall GF I die Bedingung Gl. 4.84 und im Grenzfall GF II die Bedingung Gl. 4.85 zu erfüllen.

$$\frac{\kappa Ec}{Re} \ll \frac{\kappa}{Re Pr} \quad (4.83)$$

$$\frac{\kappa Ec}{Fr^2} \ll \frac{\kappa}{Re Pr} \quad \text{GF I} \quad (4.84)$$

$$Ro_r^2 \kappa Ec \ll \frac{\kappa}{Re Pr} \quad \text{GF II} \quad (4.85)$$

Eine quantitative Abschätzung dieser Koeffizienten erfolgt durch repräsentative Werte, basierend auf den folgenden Größen in einem Kühlkanal einer Gasturbinenschaufel. Die Temperaturdifferenz ΔT wird dabei angenommen als Differenz der Verdichteraustrittstemperatur von etwa 800 K und der Lebensdauergrenztemperatur eines üblichen Schaufelmaterials von etwa 1.000 K. Die Verdichteraustrittstemperatur wird aus

einer isentropen Verdichtung ausgehend von 300 K bei 10^5 Pa und einem üblichen Verdichtungsdruckverhältnis von 30 errechnet.

$$\begin{array}{llll}
 L_{char} & \approx 10^{-3} \text{ m} & \omega & \approx 300 \frac{1}{\text{s}} & \rho & \approx 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\
 r_{char} & \approx 1 \text{ m} & \eta & \approx 20 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} & Pr & \approx 1 \\
 w_{char} & \approx 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} & c_v & \approx 700 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} & g & \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\
 \Delta T & \approx 200 \text{ K} & \kappa & \approx 1,4 & &
 \end{array}$$

Damit ergeben sich die dimensionslosen Kennzahlen zu:

$$Ec \approx 0,012.8 \quad Re \approx 2.500 \quad Fr \approx 500 \quad Ro_r \approx 6$$

Die Abschätzung ergibt die nachfolgend aufgelisteten Werte der Koeffizienten:

$$\begin{array}{ll}
 \frac{\kappa Ec}{Re} = 5 \cdot 10^{-6} \ll \frac{\kappa}{Re Pr} = 6 \cdot 10^{-4} & \Rightarrow \text{Dissipation vernachlässigbar} \\
 \frac{\kappa Ec}{Fr^2} = 7 \cdot 10^{-8} \ll \frac{\kappa}{Re Pr} = 6 \cdot 10^{-4} & \Rightarrow \text{Gravitation vernachlässigbar GF I} \\
 Ro_r^2 \kappa Ec = 6 \cdot 10^{-1} \gg \frac{\kappa}{Re Pr} = 6 \cdot 10^{-4} & \Rightarrow \text{Druckterm nicht vernachlässigbar GF II}
 \end{array}$$

Wie die quantitative Abschätzung zeigt, ist die Dissipation im Heißgas-System vernachlässigbar gegenüber der Wärmeleitung. Der Druckterm, also der Einfluss der Divergenz auf die innere Energie, ist jedoch nur im Grenzfall GF I, also im Falle des nicht rotierenden Systems, hinreichend klein, um ihn zu vernachlässigen. Sobald unter den angenommenen Bedingungen der GF II eintritt, welcher für Kühlkanäle bei Turbomaschinen entscheidend ist, wird die innere Energie nicht allein durch die Wärmeleitung verändert, sondern auch signifikant durch die Divergenz, also dem Druckterm. Sein Einfluss ist etwa 10^3 mal stärker als jener der Wärmeleitung und kann daher nicht vernachlässigt werden. Verantwortlich hierfür ist die Zentrifugalwirkung $\omega^2 r_{char}$, welche deutlich größer ist, als die Gravitation im GF I. Letztere wirkt auf das Temperaturfeld nur wie $7 \cdot 10^{-8} / 6 \cdot 10^{-1} \approx 0,000.01\%$ der Scheinkräfte, wodurch die Annahme von vernachlässigbarer Graviationswirkung im GF II **P. 24** gerechtfertigt ist. Als Folge lässt sich die Energieerhaltungsgleichung nicht, wie oben angenommen, in die analoge Form Gl. 4.22 bringen. Für das nach GF II rotierende Heißgas-System, unter den repräsentativen Bedingungen einer technischen Anwendung, ist die WSA daher nicht erfüllbar. Dieses ist sicherlich die größte, wenn auch nicht quantifizierbare Unsicherheit bei der SAM.

Neben dieser Erkenntnis zeigt die Abschätzung eine weitere Problematik bei der Bestimmung der Wärmeübertragung im Heißgas-System, sofern der GF II vorliegt. Die Wirkung der Wärmeleitung ist die eigentlich interessierende Größe, allerdings ist sie zirka 10^3 mal kleiner als die Wirkung des Druckterms. Um bei einer Wiederholungsmessung den Einfluss der Wärmeleitung auf die innere Energie überhaupt identifizieren zu können, ist es notwendig, den Druckterm auf mindestens 10^{-3} konstant zu halten. Die Abweichung des dimensionslosen Koeffizienten $Ro_r^2 \kappa Ec$ darf folglich

$10^{-3} / (6 \cdot 10^{-1}) \approx 0,2\%$ nicht überschreiten, da sie sonst die gleich große oder größere Wirkung auf das Temperaturfeld besitzt als die gesamte Wärmeleitung. Werden alle Größen des Druckterms, inklusive der dimensionslosen Divergenz aber mit Ausnahme der Drehzahl, als konstant angenommen, so darf diese nicht mehr als $\sqrt{0,2\%} \approx 4\%$, was $4\% \cdot \omega \hat{=} 12 \text{ 1/s}$ entspricht, schwanken. Um eine Reproduzierbarkeit des Wärmeübergangs von $\pm 5\%$ zu erhalten, müsste die Drehzahl daher auf $\pm 5\% \cdot 4\% \approx \pm 0,2\%$ identisch sein. Sowohl in eventuellen Experimenten mit den Bedingungen des Heißgas-Systems als auch in der technischen Anwendung lassen sich die Drehzahlen maximal mit einer derartigen Genauigkeit und Konstanz einstellen⁴. Das Postulat der stationären Rotation **P. 23** wird damit nur näherungsweise erfüllt. Daher können explizite Wärmeübergänge unter den Bedingungen einer technischen Anwendung im GF II nur mit einer Ungenauigkeit von etwa $\pm 5\%$ vorhergesagt werden, selbst wenn die Bestimmungsgrundlage nicht mit der WSA ermittelt wurde, sondern aus direkten Messungen oder numerischen Simulationen entstammen.

Abschätzung für das Stoff-System Die Änderung der inneren Energie im Stoff-System ist nicht direkt für die WSA von Belang. Jedoch erhöht sich die Vergleichbarkeit des Stoff-Systems mit dem Heißgas-System, wenn in beiden dieselben Mechanismen in etwa gleicher Größenordnung wirken. Eine quantitative Abschätzung jedes Terms der Energieerhaltungsgleichung wird daher mittels repräsentativer Werte durchgeführt. Diese basieren auf den Bedingungen eines, für bessere experimentelle Zugänglichkeit geometrisch skalierten Kühlkanals einer Gasturbinenschaufel bei Anwendung der NSM. Die auftretende Temperaturdifferenz ΔT ist ein Erfahrungswert aus einer Vielzahl an Experimenten mittels der NSM.

$L_{char} \approx 10^{-2} \text{ m}$	$c_{v,a} \approx 1.250 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$
$r_{char} \approx 1 \text{ m}$	$c_v = c_{v,a} \cdot \Delta \xi_a + c_{v,b} \cdot [1 - \Delta \xi_a]$
$w_{char} \approx 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$\Rightarrow c_v \approx 701 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$ nach Gl. H.16
$\Delta T \approx 1 \text{ K}$	siehe auch Kap. 4.2.5
$T_{ab} \approx 300 \text{ K}$	$\kappa \approx 1,4$
$\Delta \xi_a \approx 10^{-3}$	$\rho \approx 1 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
$\omega \approx 50 \frac{1}{\text{s}}$	$Pr \approx 1$
$\eta \approx 20 \cdot 10^{-6} \frac{\text{kg}}{\text{m s}}$	$Sc \approx 3$
$c_{v,b} \approx 700 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$	$g \approx 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Damit ergeben sich die dimensionslosen Koeffizienten zu:

$Ec \approx 0,025$	$Fr \approx 16$	$KI \approx 0,235$
$Re \approx 2.500$	$Ro_r \approx 10$	

Anzumerken ist hierbei, dass für den netto molaren Energietransport Δu_{ab} nach Gl. 4.34, der in den Koeffizienten KI nach Gl. 4.40 direkt eingeht, die Temperaturen

⁴Schätzung des Autors

beider Spezies gemäß Gl. 4.86 gleichgesetzt werden. Dieses beruht auf der Annahme von [6], dass die Temperaturänderung durch die Sublimationswärme des Naphthalins als verschwindend klein angesehen werden kann.

$$\Delta u_{ab} = c_{v,a} T_a - c_{v,b} T_b \stackrel{!}{=} [c_{v,a} - c_{v,b}] T_{ab} \quad (4.86)$$

Weiterhin wird für die auftretende Differenz im Massenanteil $\Delta \zeta_a$ angenommen, dass diese über die Konzentrationsgrenzschicht auftritt und sich daher aus dem Unterschied von Massenanteil an der Wand ζ_{a_w} und Massenanteil im Fernfeld ζ_{a_∞} ergibt. Letztgenannter ist in rezirkulationsfreien Strömungen gleich Null $\zeta_{a_\infty} \rightarrow 0$. Für den Massenanteil an der Wand wird ein durch [6] formuliertes Postulat Gl. 4.87 verwendet. Dieses setzt den Partialdruck des Naphthalins dem Dampfdruck von Naphthalin gleich, wodurch sich, bei Annahme von thermisch idealem Gas, die Partialdichte und somit auch der Massenanteil bestimmen lässt. Zur Quantifizierung des Dampfdrucks von Naphthalin wird dabei die empirische Gleichung Gl. 4.88 verwendet, welche ebenfalls durch [6] angegeben wird. Diese liefert annähernd gleiche Ergebnisse wie neuere Korrelationen von [33] und [34].

$$\rho_a \stackrel{!}{=} \frac{p_{a_v}}{R_a T_w} \quad (4.87)$$

$$p_{a_v} \stackrel{!}{=} 10^{13,57 - \frac{3734}{T}} \quad (4.88)$$

Die Abschätzung ergibt die nachfolgend aufgelisteten Werte der Koeffizienten:

$$\frac{\kappa E_c}{Re} = 1 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \text{Dissipation sehr klein}$$

$$\frac{KI}{Re Sc} = 3 \cdot 10^{-5} \Rightarrow \text{Molarer Transport sehr klein}$$

$$\frac{\kappa}{Re Pr} = 6 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \text{Wärmeleitung klein}$$

$$\frac{\kappa E_c}{Fr^2} = 1 \cdot 10^{-4} \Rightarrow \text{Gravitation klein GF I}$$

$$Ro_f^2 \kappa E_c = 4 \Rightarrow \text{Druckterm sehr groß GF II}$$

Aus den abgeschätzten Koeffizienten folgt, dass die innere Energie des Stoff-Systems im GF I annähernd gleich stark von der Wärmeleitung wie von der Gravitation, also auch der Divergenz beeinflusst wird. Nur geringfügig schwächer fällt die Wirkung des molaren Transports und der Dissipation aus. Im Stoff-System im GF I wirken daher deutlich mehr Mechanismen am Energietransport als im Heißgas-System im selben Grenzfall. Somit wird die geforderte Isothermie **P. 21**, abgesehen von variierenden Eintrittsbedingungen, auch durch alle Mechanismen des Transports von innerer Energie gefährdet. Es ist daher notwendig, nicht nur den naheliegendsten Effekt zur Temperaturbeeinflussung, die Wärmeleitung, so gering zu halten wie möglich, sondern auch den Druckterm und die Dissipation. Selbiges würde auch auf den molaren Transport zutreffen, jedoch basiert dieser auf dem eigentlich interessierenden Mechanismus des Stofftransports und seine Reduzierung steigert unweigerlich die Anforderungen an die Messtechnik.

Eine weitere Schlussfolgerung aus dieser Abschätzung ist, dass die innere Energie im

GF II im Stoff-System, genauso wie im Heißgas-System, vom Druckterm, also auch der Divergenz dominiert wird. Sein Einfluss ist zirka 10^5 mal stärker als der der nächst kleineren Terme der Wärmeleitung. Nochmals um den Faktor 10 kleiner ist die Wirkung des molaren Transports und der Dissipation. Die Wärmeleitung, die Dissipation und der molare Transport sind daher im GF II gegenüber dem Druckterm vernachlässigbar. Somit wird die geforderte Isothermie **P. 21**, abgesehen von variierenden Eintrittsbedingungen, überwiegend durch den Druckterm gefährdet. Die in ihm enthaltene dimensionslose Divergenz ist dem System immanent und ihr Einfluss auf die Temperaturverteilung daher unvermeidbar. Um weitere Veränderungen des Temperaturfelds auszuschließen, ist eine möglichst große Konstanz des Koeffizienten $Ro_T^2 \kappa Ec$, wie sie auch zur Wahrung der Reproduzierbarkeit beim Heißgas-System gefordert wird, und des dimensionslosen Drucks \bar{p} notwendig. Eine quantitative Abschätzung, welche Konstanz erreicht werden muss, damit der Stoffübergang eine bestimmte Unsicherheit aufweist, ist jedoch erst möglich, wenn der Einfluss der Temperatur auf den Stofftransport bekannt ist. Diese Abhängigkeit wird primär durch das Materialgesetz der Stoffleitung und damit durch den Diffusionskoeffizienten bedingt. In Kap. 4.2.5 wird dessen Temperaturabhängigkeit abgeschätzt und seine Abweichung für die hier angenommene Schwankung von $\Delta T \approx 1$ K ermittelt. Diese Temperaturschwankung führt in Gl. 4.82 zu $\frac{DT}{Dt} \hat{=} 1 = 100\%$ und würde folglich erst durch eine Änderung des dimensionslosen Drucks von $100\% / (Ro_T^2 \kappa Ec) \approx 25\%$, was $25\% \rho \omega^2 r_{char}^2 = 625$ Pa entspricht, verursacht. Die Vernachlässigung der Gravitation im GF II **P. 24**, welche pro Umdrehung eine Druckschwankung von $\rho g 2r_{char} \approx 20$ Pa $\equiv 3,2\%_{625}$ Pa hervorruft, ist damit bezüglich der Temperaturbeeinflussung gerechtfertigt. In dieser Hinsicht ist auch die Annahme von stationärer Rotation **P. 23** zutreffend. Die Drehzahl müsste zum Erreichen einer Druckschwankung von 650 Pa und einer durch diese hervorgerufene Temperaturschwankung von $\Delta T \approx 1$ K um 50% variieren. Eine derart große Schwankung kann ausgeschlossen werden. Generell ist jedoch im Experiment eine Druckschwankung größer als 600 Pa zu vermeiden, damit die in dieser Arbeit getroffenen Aussagen bezüglich der Isothermie Gültigkeit behalten.

Ferner bestätigt diese Abschätzung, dass durch die annähernd gleichwertigen Anteile von Wärmeleitung, Dissipation und molarem Transport an der inneren Energie, die Bedingungen Gl. 4.75 und Gl. 4.76 nicht hinreichend sind, um die Kompressibilität abzuschätzen. Hierzu dürfte die innere Energie nur durch die Eigenreibung, also die Dissipation verändert werden (siehe Kap. 4.2.2), nicht aber durch die Wärmeleitung oder den molaren Transport.

4.2.4. Einfluss der Gravitation

Eine für die Entdimensionierung der Impulserhaltungsgleichung im GF II verwendete Annahme ist die Vernachlässigung der Gravitation gegenüber den Scheinkräften **P. 24**. Bezüglich des eigentlich nicht relevanten Einflusses auf die innere Energie ist sie bereits in Kap. 4.2.3 als zutreffend bestätigt worden. Für die Wirkung auf das Geschwindigkeitsfeld wird das Postulat basierend auf der Ungleichung Gl. 4.54 und durch die repräsentativen Bedingungen explizit überprüft. Entscheidend hierfür ist

der getrennte Vergleich der Gravitation mit beiden Scheinkräften, der Zentrifugalwirkung $\omega^2 \cdot r_{char}$ und der Coriolis-Wirkung $\omega \cdot u$. Die Trennung ist erforderlich, da in vollständig offenen Fluidsystemen, also unendlich großen Kanälen, die Zentrifugalwirkung nicht zu einer Druckerhöhung führt, sondern eine radiale Beschleunigung des Fluids bewirkt. Erst durch die Anwesenheit von Wänden ergibt sich aus einem Teil der Zentrifugalwirkung ein statisches Druckfeld, welches nur den Zustand des Fluids ändert und die Strömung nicht direkt beeinflusst. Der restliche Anteil beschleunigt das Fluid. Dieser Effekt wird oft als Pumpeffekt bezeichnet und ist der elementare Mechanismus von Radialpumpen und -verdichtern. In vollständig geschlossenen Systemen, wie sie allerdings nur bei sehr wenigen Kühlmethoden⁵ vorkommen, existiert kein Pumpeffekt und die Zentrifugalwirkung wird vollständig in ein statisches Druckfeld gewandelt. Hierbei sei vorausgesetzt, dass durch inhomogene Massendichteverteilung bedingte Auftriebseffekte nicht auftreten. Die mit der SAM üblicherweise betrachteten Systeme sind jedoch offen und folglich ist neben der Coriolis-Wirkung auch die Zentrifugalwirkung zur Beeinflussung des Geschwindigkeitsfeldes in der Lage. A priori kann dabei nicht bestimmt werden, zu welchen Anteilen sich die Zentrifugalwirkung auf das Druck- und auf das Geschwindigkeitsfeld aufteilt. Allein der extremste Fall von vollständiger Pumpwirkung ist abschätzbar. Auch für die Coriolis-Wirkung lässt sich nur die maximale Größenordnung aus der charakteristischen Geschwindigkeit w_{char} bestimmen. Innerhalb der Geschwindigkeitsgrenzschicht jedoch ist die Coriolis-Wirkung zwangsläufig kleiner und auch teilweise geringer als die Gravitation. Daher sind wandnahe Effekte, wie der Wärme- oder Stoffübergang immer durch die Gravitation beeinflusst. Die nachfolgende quantitative Abschätzung Gl. 4.89 ist somit nur für das Fernfeld gültig und kann einzig angeben, ob die Gravitation für das grobe Strömungsbild relevant ist.

$$|\vec{k} - \vec{a}| \hat{=} g \quad \wedge \quad |2\vec{\omega} \times \vec{u}| \hat{=} \omega \cdot u \quad (4.89)$$

$$|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x})| \hat{=} \omega^2 \cdot r_{char} \quad (4.90)$$

$$\text{Heißgas-System: } \mathcal{O}(g) = 10 \text{ m/s}^2 \ll \mathcal{O}(\omega^2 \cdot r_{char}) = 90.000 \text{ m/s}^2 \quad (4.91)$$

$$\ll \mathcal{O}(\omega \cdot u) = 15.000 \text{ m/s}^2 \quad (4.92)$$

$$\text{Stoff-System: } \mathcal{O}(g) = 10 \text{ m/s}^2 \ll \mathcal{O}(\omega^2 \cdot r_{char}) = 2.500 \text{ m/s}^2 \quad (4.93)$$

$$\ll \mathcal{O}(\omega \cdot u) = 250 \text{ m/s}^2 \quad (4.94)$$

Für das Heißgas- und das Stoff-System sind Zentrifugal- als auch Coriolis-Wirkung sehr viel größer als die Gravitationswirkung. Im Falle des Stoff-Systems ist die Gravitation mit einem Einfluss wie 4% der Coriolis-Wirkung allerdings stärker als im Heißgas-System, wo dieser Einfluss bei nur 0,07% liegt. Das Geschwindigkeitsfeld des Stoff-Systems außerhalb der Grenzschicht könnte daher binnen einer Umdrehung Schwankungen von bis zu 4% aufweisen, sofern kein Pumpeffekt vorliegt. Die Schwankungen in der Grenzschicht werden zwangsläufig größer sein und übersteigen im Bereich

⁵Beispielsweise bei geschlossenen Zwei-Phasen-Wärmeübertragern wie Wärmerohren, engl. heatpipes

zwischen Wand und einer Geschwindigkeit von $4\% \cdot w_{char} \hat{=} 0,2 \text{ m/s}$ die Coriolis-Wirkung. In Systemen, in denen die Coriolis-Wirkung die wandnahe Strömung stark beeinflussen kann, da die Geschwindigkeitsgrenzschicht lokal sehr unterschiedlich ist, besitzt auch die Gravitation folglich eine nicht unbedingt vernachlässigbare Wirkung auf die Geschwindigkeitsverteilung und damit auch auf den Stoff- und Wärmetransport. Ein Beispiel für eine technische Anwendung, bei der dieser Effekt auftreten kann, sind nicht vollständig zur Rotationsachse parallel verlaufende Filmkühlstrahlen auf oder in Rotorschaukeln einer Turbine. Diese werden unter Rotation, bedingt durch die Coriolis-Wirkung, relativ zur Schaufel einen anderen Pfad nehmen als im stehenden Fall (siehe [35]). Die Gravitation hat dann einen ähnlich starken Einfluss. Dieser ist im Relativsystem instationär aber mit der Drehzahl periodisch. In zeitlich gering auflösenden Experimenten, wie sie bei der SAM üblich sind, würde die periodische Gravitationswirkung dann als Mittelwertsänderung des Stoff- oder Wärmeübergangs festgestellt, sofern die Messgenauigkeit ausreicht. In Strömungssystemen mit räumlich gleichmäßiger Geschwindigkeitsgrenzschicht, wodurch die Coriolis-Wirkung wandnah nicht erkennbar ist, wird auch die Gravitation dort vernachlässigbar.

Schlussfolgerung Der Einfluss der Gravitation im GF II ist sowohl für den Transport von innerer Energie als auch für den Transport des Impulses sehr klein und rechtfertigt die Annahme Gl. 4.54 P. 24. Die Vergleichbarkeit des Geschwindigkeitsfeldes von Stoff- und Heißgas-System allerdings weist durch die höheren periodischen Schwankungen im Fernfeld des Stoff-Systems eine Unwägbarkeit von bis zu 4% auf.

4.2.5. Abschätzung der Konstanz der Materialkoeffizienten

Damit die WSA gegeben ist, müssen sich Fick'sche Diffusion und Fourier'sche Wärmeleitung entsprechen, also die räumliche Verteilung des Diffusionskoeffizienten D und der Wärmeleitfähigkeit λ übereinstimmen (Gl. 4.23). Weiterhin müssen D und λ sowie die dynamische Viskosität η als nahezu konstant ansehbar sein, um die Dissipation und die dimensionslosen Kennzahlen, wie die Reynolds-, Schmidt- und Prandtl-Zahl bilden zu können. Sowohl für die Wärmeleitfähigkeit und für die Viskosität als auch für den Diffusionskoeffizienten ist deren Abhängigkeit von den räumlich variierenden Zustandsgrößen, Temperatur und Druck, aus theoretischen Überlegungen und teilweise auch aus Experimenten bekannt, sofern es sich um ein einkomponentiges Fluid handelt. Für das Heißgas-System lässt sich daher die Konstanz jedes Materialkoeffizienten auf Basis theoretischer Modelle und empirischer Korrelationen abschätzen. Für ein mehrkomponentiges Gas hingegen, wie es für das Stoff-System angenommen wird, kann der Massenanteil ξ_a die Materialkoeffizienten zusätzlich beeinflussen. Damit die WSA gültig ist, muss dieser Einfluss, ebenso wie jener der Temperatur und des Drucks, sehr gering sein. Die Vernachlässigbarkeit dieses Einflusses wird im Folgenden anhand eines gaskinetischen Transportmodells mittels den zuvor bereits verwendeten repräsentativen Bedingungen abgeschätzt. Da dieses Modell die reale Teilchenkinetik nur sehr vereinfacht und folglich mit größeren Abweichungen abbildet, ist das Niveau der ermittelten Werte nicht quantitativ richtig. Das Gegenüberstellen der Temperatur- und Massenanteilsabhängigkeit, der anhand des Modells ermittelten Materialkoeffizienten,

liefert jedoch Aufschluß über den Einfluss des Massenanteils.

Vereinfachtes, gaskinetisches Transportmodell

Das hier zur Abschätzung verwendete gaskinetische Transportmodell ist eine Erweiterung des in der Gaskinetik bekannten 1/6 Modells (ESM) auf zwei Spezies mit unterschiedlichen Teilchenmassen und -durchmessern. Die Herleitung des im Weiteren als erweitertes gaskinetisches Transportmodell (ETM) bezeichneten Modells ist mit kurzer Beschreibung in Anh. O angegeben. Ansatz des ETM ist, dass sich 1/6 aller Teilchen geradlinig in jeweils eine Richtung bewegen. Weiterhin werden, wie bereits bei den allgemeinen Grundgleichungen, vollelastische Stöße angenommen. Dieser Ansatz bildet die Realität in vielen Fällen nur unzureichend ab. Daher werden zwei bekannte Modelle zur Validierung des ETM verwendet. Ein Vergleichsmodell, das im Folgenden exaktes Boltzmann Modell (EBM) genannt wird, folgt aus der exakten Lösung der Boltzmann-Gleichung bei einer Geschwindigkeitsverteilung nach Maxwell. Dieses trifft daher nur für ein im Gleichgewicht befindliches Gas aus kugelförmigen Teilchen zu. Gleichgewicht bedeutet hierbei, dass alle Teilchen dieselbe thermische Geschwindigkeit und damit dieselbe Temperatur aufweisen. Bei der SAM ist dieses Gleichgewicht bereits durch Gl. 4.86 angenommen. Weiterhin besitzen die Teilchen kein räumliches Wechselwirkungspotential, wodurch sich alle Stöße vollelastisch vollziehen. Des Weiteren setzt das EBM gleich große Teilchen voraus. Das zweite, wesentlich detailliertere Modell, im Folgenden Lennard-Jones Modell (LJM) genannt, berücksichtigt neben der Maxwell-Geschwindigkeitsverteilung speziesabhängige Wechselwirkungspotenziale nach Lennard-Jones. Damit werden indirekt unterschiedliche Teilchendurchmesser und -massen berücksichtigt. Das LJM liefert Werte, die mit experimentell ermittelten sehr gut übereinstimmen. Die einzelnen Gleichungen dieses Modells sind in Kap. Q.1 angegeben. Allerdings werden für das LJM neben dem temperaturabhängigen und tabellierten Wert des Kollisionsintegrals auch zwei speziespezifische Kraftkonstanten des Lennard-Jones-Potentials benötigt. Diese sind für viele Gase experimentell ermittelt worden, jedoch für das bei der SAM verwendete Naphthalin dem Autor unbekannt. Daher muss auf das ETM zurückgegriffen werden, welches aber am detaillierteren LJM validiert wird. Die wesentlichen Eigenschaften der Modelle sind nachfolgend nochmals zusammengefasst:

ETM	vollelast. Ströße beliebig großer, kugelförmiger Teilchen bei 1/6 Verteilung
ESM	vollelast. Ströße gleich großer, kugelförmiger Teilchen bei 1/6 Verteilung
EBM	vollelast. Ströße gleich großer, kugelförmiger Teilchen bei Maxwell-Vertlg.
LJM	Lennard-Jones-Potential beliebig großer Teilchen bei Maxwell-Verteilung

Nach dem ETM folgt die makroskopische Wirkung Λ einer makroskopischen Variable

Φ , wie beispielsweise die Schubspannung $\hat{\tau}$ aus der Geschwindigkeit w , zu Gl. 4.95.

$$\Lambda = \frac{\sqrt{3k_B T [n_1 + n_2]}}{3\pi} \cdot \frac{d\Phi}{dy} \cdot \left[\frac{n_1 \cdot m_1 + n_2 \cdot m_2}{\sqrt{n_1 \cdot m_1 \cdot \left(\sigma_1^2 \cdot n_1 + \frac{n_1}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2\right)^2 + n_2 \cdot m_2 \cdot \left(\sigma_2^2 \cdot n_2 + \frac{n_1}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2\right)^2}} \right] \quad (4.95)$$

Hierin sind

Φ	Makroskopische Variable	m_1	Teilchenmasse der Komponente 1
Λ	Makroskopische Wirkung der Variable Φ	n_1	Teilchendichte der Komponente 1
k_B	Boltzmann-Konstante	σ_1	Van der Waals Durchmesser der Teilchen der Komponente 1

Der Koeffizient eines linearen Materialgesetzes und dessen Abhängigkeiten von makroskopischen Größen $f(T, m_1, m_2, n_1, n_2, \sigma_1, \sigma_2)$, in diesem Beispiel die eindimensionale Stoke'sche Reibung (nach Gl. H.10), lässt sich dann aus den teilchenkinetischen Eigenschaften bestimmen gemäß Gl. 4.96.

$$\hat{\tau} = \eta \cdot \frac{du}{dy} \Leftrightarrow \Lambda = f(T, m_1, m_2, n_1, n_2, \sigma_1, \sigma_2) \cdot \frac{d\Phi}{dy} \quad (4.96)$$

Bedingung der konstanten Viskosität

Aus dem ETM Gl. 4.95 folgt für

$$\Lambda = \hat{\tau} \wedge \Phi = u \wedge \hat{\tau} = \eta \frac{du}{dy}$$

die Abhängigkeit der dynamischen Viskosität von der Temperatur, den Teilchenmassen und -durchmessern sowie -dichten zu Gl. P.1. Für ein einkomponentiges Gas, es sind dann alle Teilchenmassen $m_1 = m_2 = m$, alle Teilchendichten $n_1 = n_2 = n$ und alle Van der Waals Durchmesser $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ gleich, geht das erweiterte Modell über in die Abschätzung, wie sie aus dem ESM hervorgeht (Gl. 4.98). Für Reinstoffe entspricht das ETM somit dem bekannten ESM.

Validierung Für die Diskussion der Abhängigkeit der Viskosität vom Massenanteil, welche mit dem ETM ermittelt wird, ist es sinnvoll, die Qualität des Modells anhand einer expliziten Validierung zu verdeutlichen. Hierzu eignet sich die Vorhersage der Viskosität von Sauerstoff O_2 , Benzol C_6H_6 sowie von einem Gemisch aus beidem, da für diese Spezies die Lennard-Jones Kraftkonstanten bekannt sind. Weiterhin besitzt Benzol einen etwa doppelt so großen Van der Waals Durchmesser wie Sauerstoff,

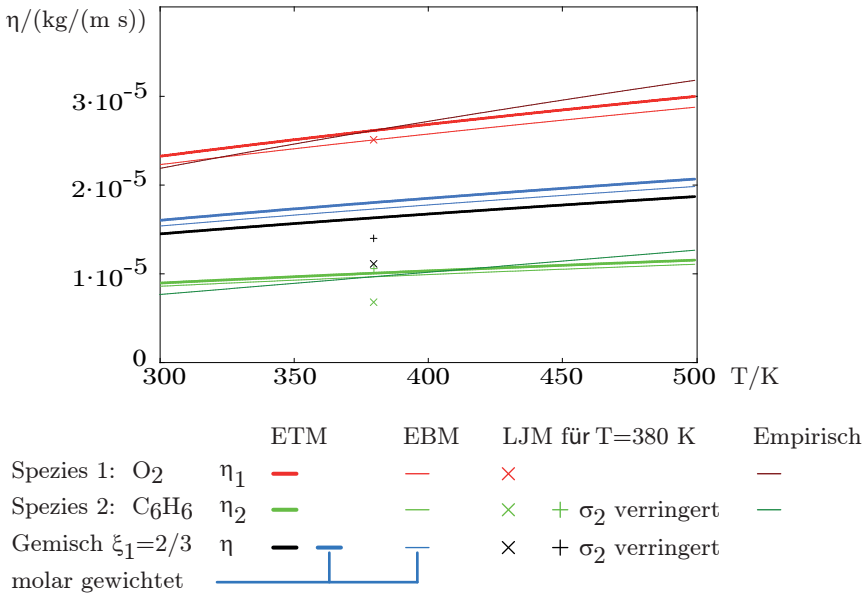


Abbildung 4.4.: Vergleich der Modelle zur Beschreibung der dynamischen Viskosität bei festem Massenanteil

sodass der Einfluss der Teilchengröße in die Validierung mit einbezogen wird. Die im Folgenden aufgezeigten Ergebnisse basieren auf den in Anh. Q angegebenen Werten.

In Abb. 4.4 ist die vom ETM ermittelte Viskosität von reinem Sauerstoff η_1 und reinem Benzol η_2 dargestellt. Die im ETM auftretende Temperaturabhängigkeit \sqrt{T} entspricht laut [36] annähernd der Lösung des LJM. Allerdings zeigen die experimentellen Ergebnisse in Form der empirischen Gleichungen, Gl. Q.16, Gl. Q.17 aus [37], eine etwas stärkere Temperaturabhängigkeit. Die Niveaus der Viskositäten der Reinstoffe werden vom ETM im Vergleich zum EBM mit einer relativen Abweichung von konstanten

$$\frac{\frac{5\sqrt{\pi}}{16} - \frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{5\sqrt{\pi}}{16}} \approx 4,2\%_{\text{LJM}} \quad (4.97)$$

geringfügig überschätzt (vergleiche Gl. 4.98 mit Gl. 4.99). Bei einer Temperatur von $T \approx 380$ K stimmt die Vorhersage des ETM allerdings fast exakt mit den empirisch ermittelten Werten überein. Bei dieser Temperatur weichen die Ergebnisse von ETM und empirischer Korrelation für Sauerstoff um vernachlässigbare $+0,03\%_{\text{Empirisch}}$ und für Benzol um $-4,2\%_{\text{Empirisch}}$ voneinander ab. Das ETM scheint in der Lage zu sein, die Viskositäten der Reinstoffe ausreichend präzise vorhersagen zu können. Die vermeintlich genaueren Werte, die das LJM für eine Temperatur von $T = 380$ K

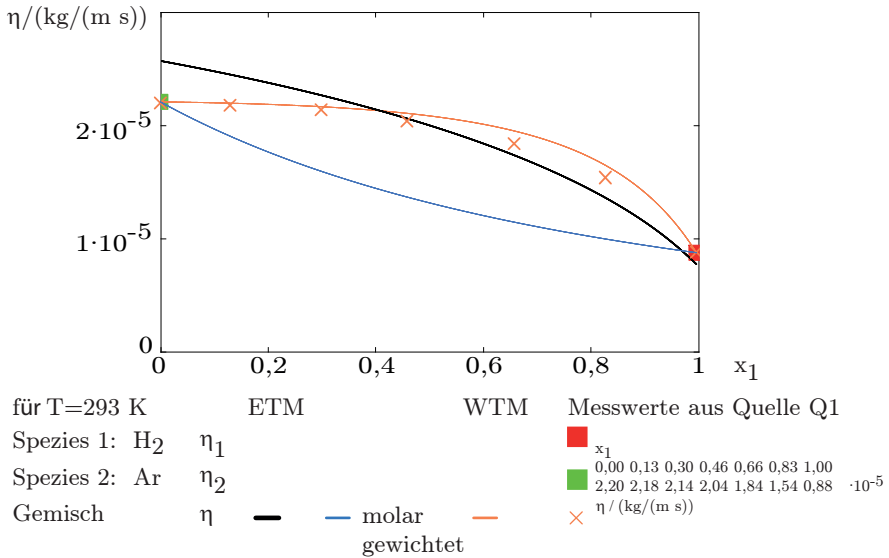


Abbildung 4.5: Vergleich der Modelle zur Beschreibung der dynamischen Viskosität bei fester Temperatur; Quelle: Q1= [2]

vorhersagt, liegen bei Sauerstoff nahe den Werten des ETM ($-4,2\%_{\text{LJM}}$) und des EBM ($+0,1\%_{\text{LJM}}$) sowie den experimentellen Werten ($-4,2\%_{\text{LJM}}$).

Für Benzol allerdings ist der empirische Wert der Viskosität bei $T = 380 \text{ K}$ um $+42,5\%_{\text{LJM}}$ höher, als der, den das LJM vorhersagt. Grund hierfür dürften die nicht ausreichend genauen Lennard-Jones Kraftkonstanten für einen Benzol-Teilchendurchmesser von $\sigma_2 = 692 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ sein, welche aus [38] stammen. Aus diesem Grund wird für das LJM ein weiterer, verringerter Wert für den Teilchendurchmesser von Benzol von $\sigma_2 = 562 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ herangezogen. Dieser stammt ebenfalls aus [38] und korreliert mit einer etwas erhöhten Kraftkonstante (siehe Gl. Q.2). Durch diese alternativen Werte verringert sich die Abweichung der vorhergesagten Viskosität von Benzol zwischen LJM und empirischer Korrelation auf $-9,2\%_{\text{LJM}}$. Für die Validierung des ETM wird daher das LJM mit kleinerem Teilchendurchmesser für Benzol verwendet, auch wenn im ETM der größere Wert eingesetzt wird.

$$\eta \stackrel{\text{ESM}}{=} \frac{\sqrt{3k_B T m}}{3\pi\sigma^2} \quad (4.98)$$

$$\eta \stackrel{\text{EBM}}{=} \frac{5\sqrt{\pi k_B T m}}{16\pi\sigma^2} \quad (4.99)$$

Das ETM und das EBM liefern für Reinstoffe ausreichend gute Werte für die Viskosität, zumindest um anhand des ETM den Einfluss unterschiedlicher Teilchengrößen in einem Gemisch abzuschätzen. Hierzu ist in Abb. 4.4 die Temperaturabhängigkeit der Viskosität des Gemisches η aus Sauerstoff und Benzol bei einem Massenanteil des

Sauerstoffs von $\xi_1 = 2/3$ dargestellt. Im Vergleich zum Wert, der mit dem LJM für eine Temperatur von $T = 380$ K ermittelt wird, zeigt das ETM eine Überschätzung von etwa $+16,6\%_{\text{LJM}}$. Diese Abweichung ist jedoch geringer als jene, die durch die in der Thermodynamik übliche, molare Wichtung der Viskositäten der Reinstoffe nach Gl. Q.5 erreicht wird. Sie liegt bei $+28,9\%_{\text{LJM}}$, sofern zur Bestimmung der Viskosität der Reinstoffe das ETM Verwendung findet. Wird die Viskosität der Reinstoffe mit dem EBM bestimmt, liegt die Abweichung der molaren Wichtung mit $+23,7\%_{\text{LJM}}$ zwar näher am Ergebnis des LJM, allerdings immer noch deutlich über der Abweichung des ETM zum LJM. Grund für die größere Abweichung dürfte sein, dass die molare Wichtung, im Gegensatz zum LJM und ETM, die unterschiedlichen Teilchendurchmesser der Spezies nicht berücksichtigt. Das ETM scheint daher geeignet, den Einfluss unterschiedlich großer Teilchen auf die Viskosität eines Gasgemisches abzuschätzen. Anzumerken ist hierbei, dass die nicht mit den experimentellen Werten übereinstimmende Vorhersage des LJM bei größerem Benzol-Teilchendurchmesser einen entscheidenden Einfluss auf die Viskosität des Gemisches hat. Diese ist bei größerem Teilchendurchmesser wesentlich geringer (vergleiche $+$ und \times in Abb. 4.4). Das verdeutlicht, wie sensibel die Modelle gegenüber der Wahl der Teilchendurchmesser sind. Daher können von diesen keine quantitativ exakten Werte erwartet werden, sondern nur qualitative Tendenzen.

Es bestätigt sich, dass das ETM in der Lage ist, den Einfluss unterschiedlich großer Teilchen auf die Viskosität in Abhängigkeit vom Massenanteil zu berücksichtigen. Dieses gilt zumindest, wenn die Vorhersage des ETM für verschiedene Molanteile (Gl. H.33) aber fester Temperatur mit Messwerten und einem Wichtungsmodell Gl. Q.7 nach [2], im Folgenden WTM genannt, verglichen wird. Das WTM basiert auf einer reinen gaskinetischen Betrachtung und berücksichtigt nur die unterschiedlichen Massen der Teilchen, nicht aber deren Größen. Für die Viskosität eines Gemisches aus verschiedenen Anteilen an Wasserstoff H_2 und Argon Ar bei $T = 293$ K liefert das WTM eine sehr gute Übereinstimmung mit experimentellen Werten (siehe Abb. 4.5). Grund hierfür dürften die annähernd gleich großen, aber stark unterschiedlich schweren Teilchen von Wasserstoff und Argon sein. Dahingegen zeigt die molare Wichtung eine vollständig andere Abhängigkeit der Viskosität vom Molanteil mit einer Abweichung zu den experimentellen Werten von bis zu etwa 40% bei $x_1 = 0,73$, obwohl die gleichen Werte der Viskositäten der Reinstoffe verwendet werden. Das ETM hingegen liefert qualitativ einen ähnlichen Verlauf wie das WTM beziehungsweise die experimentellen Ergebnisse. Auch die Abweichungen der Absolutwerte sind, mit Ausnahme der Bereiche sehr dünner Gemische ($x_1 < 0,2$ und $x_1 > 0,95$) deutlich geringer, als die Abweichungen der molaren Wichtung zum WTM beziehungsweise zum Experiment. Zu berücksichtigen ist hierbei, dass das ETM nur experimentell bestimmte Teilchendurchmesser und -massen verwendet, nicht aber, wie die molare Wichtung und das WTM, experimentell bestimmte Werte für die Viskosität der Reinstoffe. Da das ETM sowohl die Temperaturabhängigkeit der Viskosität als auch deren Abhängigkeit vom Molanteil akzeptabel vorhersagt, wird dieses Modell als hinreichend genau angesehen, um den Einfluss unterschiedlicher Teilchengrößen von Gemischkomponenten auf die Viskosität abzuschätzen.

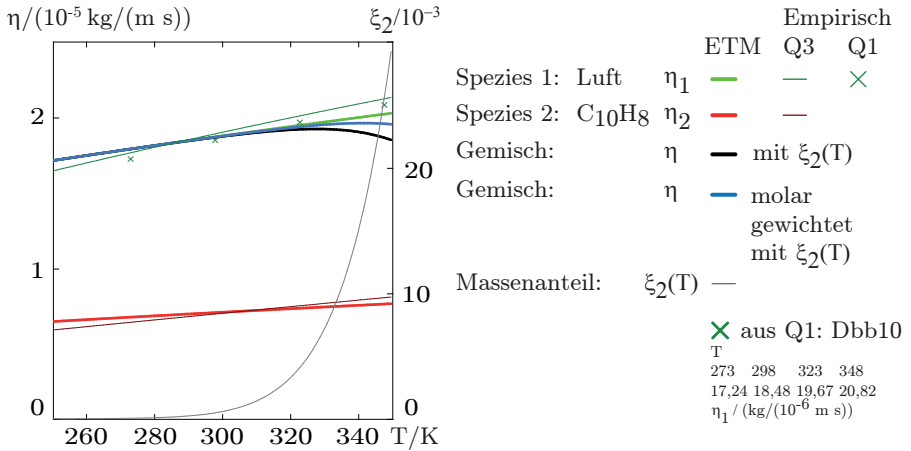


Abbildung 4.6.: Dynamische Viskosität von Naphthalin-Dampf, Luft, -Gemisch
Quellen: Q1= [39], Q3= [37]

Viskosität bei der SAM Das ETM zeigt für das Niveau der dynamischen Viskosität sowohl von Luft als auch von Naphthalin-Dampf eine sehr gute Übereinstimmung mit der empirischen Korrelationen Gl. Q.18 und Gl. Q.19 aus [37], zumindest im Temperaturbereich des Stoff-Systems (siehe Abb. 4.6). Weiterhin weist das ETM mit \sqrt{T} die gleiche Temperaturabhängigkeit auf wie alle anderen Modelle beziehungsweise eine ähnliche wie die empirischen Korrelationen. Das ETM scheint also auch für Luft, Naphthalin-Dampf und einem Gemisch aus beiden hinreichend gut geeignet zu sein, um die Viskosität und deren Abhängigkeiten abzuschätzen. Anzumerken ist hierbei, dass die empirischen Korrelationen im Vergleich zu tabellierten Einzelwerten aus früheren Auflagen gleicher Quelle [39], [40] nur bis zu einer Temperatur $T < 450$ K akzeptable Werte liefern (siehe dazu Abb. 4.7). Mit neuen Korrelationswerten Gl. Q.20 basierend auf den Tabellenwerten lässt sich die Korrelation erweitern und ist bis zu Temperaturen von $T < 2.000$ K hinreichend genau. Diese erweiterte Korrelation wird in dieser Arbeit nur für Luft im Temperaturbereich des Heißgas-Systems verwendet.

Ein bei der SAM repräsentatives Heißgas-System weist eine räumliche Temperaturdifferenz von $\Delta T \approx 200$ K (siehe Kap. 4.2.3) und ein Temperaturniveau⁶ von $T \approx 1.700$ K auf. Die somit aus dem ETM folgende relative Variation der Viskosität nach Gl. 4.100 liegt bei 5,6%_{MW}. Diese Variation entspricht auch ungefähr jener, die mit den Werten der neuen Korrelation (Gl. Q.20) gewonnen werden. Sie liegt bei 3,1%_{MW}. Bei Kühlsystemen tritt diese Variation in der Regel als Gradient in der Temperaturgrenzschicht auf. Da für Gase mit $Pr \approx 1$ die Temperaturgrenzschicht etwa gleich groß ist wie die

⁶Die Kühlung einer Turbinenschaufel wird meist so ausgelegt, dass ein geringeres Temperaturniveau vorliegt, welches die Lebensdauergrenztemperatur des Material von etwa 1.000 K nicht überschreitet. Trotzdem wir hier das höchste vorstellbare Niveau, die Brennkammeraustrittstemperatur angenommen. Die prinzipiellen Aussagen ändert dieses nur kaum.

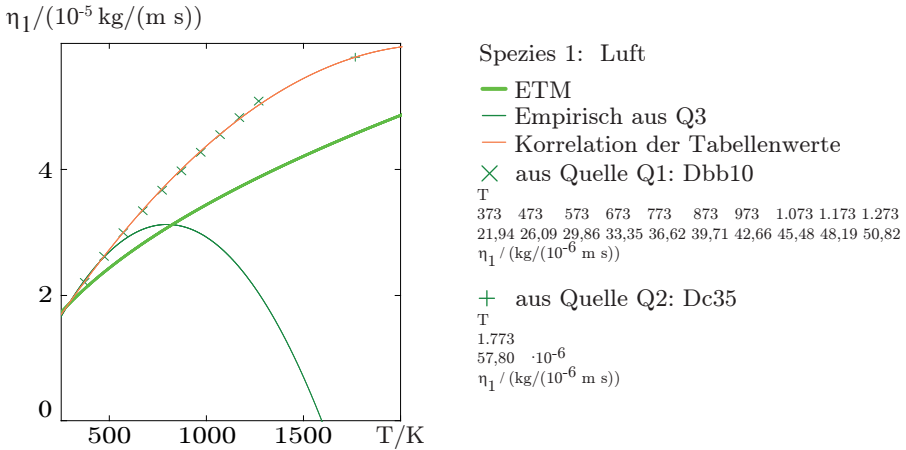


Abbildung 4.7.: Dynamische Viskosität von Luft
Quellen: Q1= [39], Q2= [40], Q3= [37]

Geschwindigkeitsgrenschicht, weist die Skalierung mit einer Reynolds-Zahl Re eine Ungenauigkeit von etwa 6% auf. Wird für die Reynolds-Zahl nicht die Geschwindigkeitsgrenschichtdicke als charakteristische Länge verwendet, sondern beispielsweise der in der Regel wesentlich größere, hydraulische Durchmesser eines Kühlkanals, so steigt diese Ungenauigkeit zwangsläufig weiter an.

$$\frac{\Delta\eta}{\eta} = \frac{|\sqrt{T+\Delta T} - \sqrt{T}|}{\sqrt{T + \frac{\Delta T}{2}}} \quad (4.100)$$

Im Stoff-System hingegen ist die Temperaturdifferenz mit $\Delta T \approx 1$ K (siehe Kap. 4.2.3) auch im Vergleich zum niedrigeren Temperaturniveau $T \approx 300$ K sehr klein. Die Viskosität von reiner Luft und reinem Naphthalin-Dampf variiert laut ETM zwangsläufig identisch um vernachlässigbare $0,2\%_{MW}$. Die empirischen Korrelationen liefern für Luft und für Naphthalin-Dampf fast identische Werte von etwa $0,3\%_{MW}$. Im ETM beeinflusst allerdings neben der Temperatur die Teilchengröße der Spezies und auch deren Teilchendichte n die Viskosität des Gasgemisches. In allen nachfolgenden Betrachtungen werden die für das ETM notwendigen Teilchendichten anhand der Molekülmassen m aus dem Massenanteil des Naphthalin-Dampfes $\xi_2(T)$ berechnet. Der Massenanteil wird, wenn nicht anders angegeben, aus der temperaturabhängigen Beziehung für die partielle Massendichte des Naphthalin-Dampfes, Gl. 4.87, mit dem Dampfdruck gemäß Gl. 4.88 nach [6] bestimmt. Mit diesen Größen unterscheidet sich laut ETM die Viskosität des Gemisches nicht signifikant von der von Luft, sofern die Temperatur nicht größer wird als $T = 310$ K (siehe Abb. 4.6). Oberhalb dieser Temperatur ($T > 310$ K) zeigen sowohl die molare Wichtung als auch das ETM eine von der von Luft verschiedene Viskosität des Gemisches. Hierbei ist die Abweichung

bei $T = 350 \text{ K}$ beim ETM mit $-8,7\%_{\eta_1}$ mehr als doppelt so groß wie bei der molaren Wichtung $-3,7\%_{\eta_1}$. Der Einfluss der unterschiedlichen Teilchendurchmesser, welcher nur im ETM eingeht, ist daher durchaus erkennbar. Für die bei der NSM üblicherweise maximal auftretende Temperatur von $T \approx 300 \text{ K}$ ist der Einfluss der unterschiedlich großen Moleküle auf die Viskosität allerdings irrelevant klein. Die Viskosität des Gemisches ist dann gleich der von Luft. Für die kleinen Temperatur- und Massenanteilsgradienten im Stoff-System ist die Viskosität daher nahezu konstant und liefert keine weitere Ungenauigkeit bei der Skalierung der Strömung mit der Reynolds-Zahl.

Die dynamische Viskosität im Stoff-System ist also anders als im Heißgas-System nahezu konstant. Es ist somit zu erwarten, dass aufgrund der Temperaturfelder im Heißgas-System die dortige Strömung trotz gleicher Reynolds-Zahl zur Strömung im Stoff-System messbare Unterschiede aufweisen kann. Unter den angenommenen Bedingungen sind die Messergebnisse, die mittels der SAM zur Untersuchung des Einflusses der Reynolds-Zahl mit einer Variation im Bereich von etwa $\pm 5\%$ gewonnen werden, daher ohne verlässliche Aussage. Für eine derartige Studie sollten deutlich größere Variationsunterschiede gewählt werden, beispielsweise $\geq 25\%$.

Schlussfolgerung Die Bedingung von räumlich und zeitlich konstanter dynamischer Viskosität **P. 13** ist für das Stoff-System sehr gut erfüllt, sofern die Temperaturen unterhalb von $T = 310 \text{ K}$ liegen und nicht mehr als $\Delta T \approx 1 \text{ K}$ variieren. Für diese Aussage muss die Bestimmung des Massenanteils vom Naphthalin-Dampf nach [6] die Realität ausreichend abbilden. Für das Heißgas-System variiert die Viskosität temperaturbedingt räumlich derart stark, dass die Skalierung der Reynolds-Zahl eine Ungenauigkeit von etwa $6\%_{MW}$ aufweist. Somit kann bei unterschiedlichen Temperaturfeldern trotz gleicher Reynolds-Zahl die Geschwindigkeit oder deren Grenzschichtdicke um $\pm 3\%$ variieren. Die Reynolds-Zahl als Parameter ist daher nur für große Variationsabstände, beispielsweise 25% aussagekräftig.

Bedingung der konstanten Wärmeleitfähigkeit

Aus dem ETM Gl. 4.95 folgt für

$$\Lambda = \dot{q} \quad \wedge \quad \Phi = u = c_v \cdot T \quad \wedge \quad \dot{q} = \lambda \frac{dT}{dy}$$

die Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit von der Temperatur, den Teilchenmassen und -durchmessern sowie -dichten zu Gl. P.2. Angenommen wurde hierfür eine räumlich konstante isochore spezifische Wärmekapazität

$$\partial c_v \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad c_v \neq c_v(T, p) \quad \wedge \quad c_v \neq c_v(T, p, \xi)$$

Wärmeleitfähigkeit bei der SAM Die Wärmeleitfähigkeit entspricht laut ETM, bis auf den als konstant postulierten Faktor der spezifischen isochoren Wärmekapazität c_v , der dynamischen Viskosität η . Auch die Temperatur- und Massenanteilsabhängigkeit sind daher mit denen der Viskosität identisch. Die in Kap. 4.2.5 getroffenen

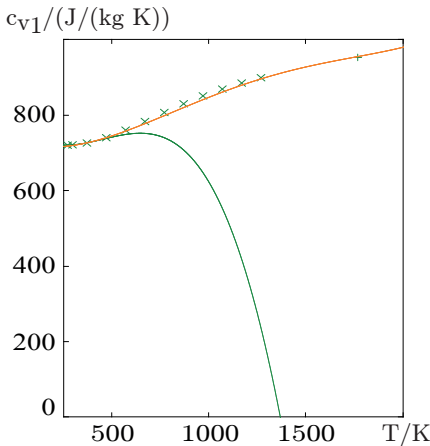


Abbildung 4.8.: Wärmekapazität von Luft
Quellen: Q1= [39], Q2= [40], Q3= [37]

Spezies 1: Luft

— Empirisch aus Q3

— Korrelation der Tabellenwerte

Tabellenwerte von $c_{p1} = c_{v1} + R_1$

mit $R_1 = 287 \text{ J/(kg K)}$

× aus Q1: Dbb7

T	273	298	373	473	573	673	773	873	973	1.073
$c_{p1} / (\text{J/(kg K)})$	1.006	1.007	1.012	1.026	1.046	1.069	1.093	1.116	1.137	1.155

× aus Q1: Dbb7

T	1.173	1.273
$c_{p1} / (\text{J/(kg K)})$	1.171	1.185

+ aus Q2: Dc19

T	1.773
$c_{p1} / (\text{J/(kg K)})$	1.239

Schlussfolgerungen bezüglich der Viskosität sind somit direkt auf die Wärmeleitfähigkeit übertragbar. Bedingung hierfür ist die hinreichende Konstanz der spezifischen isochoren Wärmekapazität. Gemäß der getroffenen Abhängigkeit Gl. 4.6 wird diese Forderung nur erfüllt, wenn ein nahezu isothermes und isobares System vorliegt. Im Falle des Stoff-Systems muss weiterhin der Massenanteil einer Komponente so gering sein, dass er keinen Einfluss auf c_v hat. Da diese drei Bedingungen nicht ohne weiteres als erfüllt angesehen werden können, werden im Folgenden die Wärmeleitfähigkeiten mit konstanten, nominellen Wärmekapazitäten aus Kap. 4.2.3 und zum Vergleich, soweit vorhanden, mit empirischen Korrelationen der Wärmekapazitäten berechnet.

Im Heißgas-System bei einem Temperaturniveau von $T \approx 1.700 \text{ K}$ variiert die spezifische isochore Wärmekapazität aufgrund der räumlichen Temperaturvariation von $\Delta T \approx 200 \text{ K}$ um $2,0\%_{\text{MW}}$. Grundlage für diese Aussage ist eine Korrelation, Gl. Q.25, die auf tabellierten Werten aus [39] und [40] basiert. Sie wird verwendet, da die genauere empirische Korrelation, Gl. Q.23 aus [37], nur für Temperaturen bis $T = 450 \text{ K}$ mit den tabellierten Werten übereinstimmt (siehe Abb. 4.8). Mit dieser Variation der Wärmekapazität schwankt die Wärmeleitfähigkeit der Luft nach dem ETM um $7,6\%_{\text{MW}}$ fast identisch mit der Schwankung von $7,3\%_{\text{MW}}$, die eine empirische Korrelation Gl. Q.31 basierend auf Tabellenwerten aus [39] und [40] vorhersagt. Eine genauere und für die Wärmeleitfähigkeit der Luft im Stoff-System verwendete empirische Korrelation, Gl. Q.29 aus [37], ist, wie bereits jene für die Wärmekapazität und Viskosität, nur für Temperaturen kleiner $T = 450 \text{ K}$ geeignet (siehe Abb. 4.10). Ob die Wärmeleitfähigkeit im Heißgas-System mit einer räumlichen Variation von etwa $7,5\%_{\text{MW}}$ für die WSA als hinreichend konstant anzusehen ist, hängt von der räumlichen Variation ihres im Stoff-System analogen Wertes, dem Diffusionskoeffizienten, ab. Schwankt der Diffusionskoeffizient räumlich in ähn-

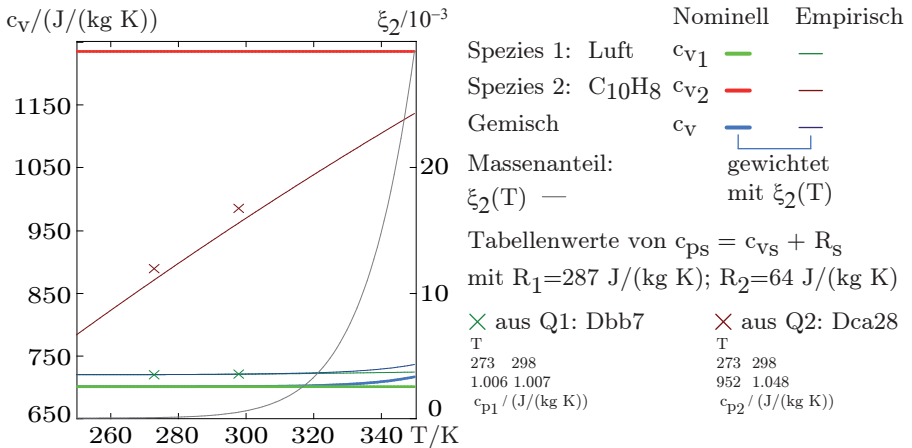


Abbildung 4.9: Wärmekapazität von Naphthalin-Dampf, Luft, -Gemisch
 Quellen: Q1= [39], Q2= [40], Q3= [37]

licher Weise und Größe wie die Wärmeleitfähigkeit im Heißgas-System, so kann diese als ausreichend konstant angesehen werden. Dann allerdings beinhaltet die Wärmestromdichte, welche mit der als konstant angenommenen Wärmeleitfähigkeit bestimmt wird, eine vom vorliegenden Temperaturverlauf abhängige Ungenauigkeit von $7,5\%_{MW}$. Zusammen mit der Schwankung des Diffusionskoeffizienten birgt die Übertragbarkeit von Stoff- und Wärmetransport eine Unsicherheit von etwa $2 \cdot 7,5\%_{MW} = 15\%_{MW}$. Ist die räumliche Variation des Diffusionskoeffizienten in Art und im Niveau deutlich von der der Wärmeleitfähigkeit im Heißgas-System verschieden, so steigt die Unsicherheit wahrscheinlich deutlich, aber nicht quantifizierbar.

Im Stoff-System beeinflusst auch der Massenanteil der Komponenten die spezifische isochore Wärmekapazität. Allerdings zeigt sich für den angenommenen maximalen Massenanteil des Naphthalin-Dampfes von $\xi_2 \equiv \Delta \xi_a \approx 10^{-3}$ und den als konstant angenommenen nominellen spezifischen isochoren Wärmekapazitäten von Naphthalin-Dampf $c_{v2} \equiv c_{v,a} \approx 1.250 \text{ J/(kg K)}$ und Luft $c_{v1} \equiv c_{v,b} \approx 700 \text{ J/(kg K)}$ (siehe Kap. 4.2.3) nach der Massenanteils-Wichtung⁷, Gl. H.16, dass der Einfluss des Naphthalin-Dampfes mit

$$c_{v,a}(T, \rho_a) \xi_a = 1,3 \frac{\text{J}}{\text{kg K}} \ll c_{v,b}(T, \rho_b) [1 - \xi_a] = 699,3 \frac{\text{J}}{\text{kg K}}$$

vernachlässigbar klein ist. Aus Abb. 4.9 ist jedoch zu erkennen, dass der Einfluss des Massenanteils ab einer Temperatur oberhalb von $T = 310 \text{ K}$, wie sie jedoch bei der NSM fast nie auftritt, zunimmt und bei $T = 350 \text{ K}$ die Wärmekapazität um etwa $2,2\%_{250 \text{ K}}$ maximal erhöht. Wegen des geringen Massenanteils des Naphthalin-

⁷Diese Wichtung ist nicht zu verwechseln mit der molaren Wichtung nach Gl. Q.3

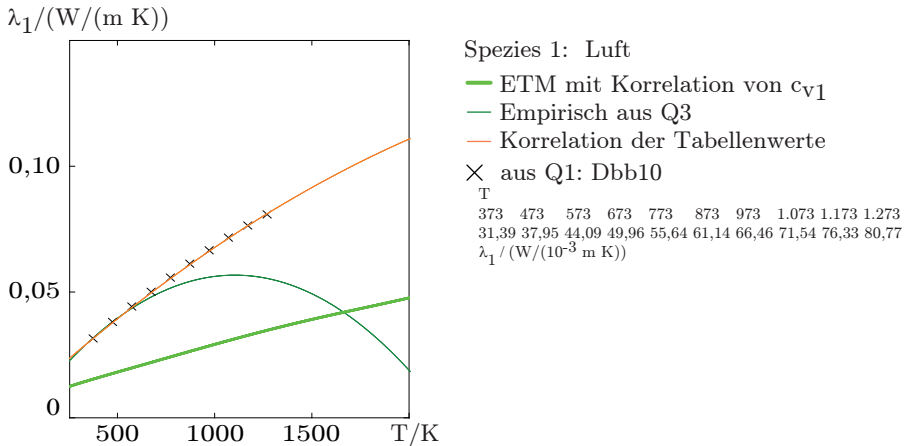


Abbildung 4.10.: Wärmeleitfähigkeit von Luft
Quellen: Q1= [39], Q2= [40], Q3= [37]

Dampfes und der geringen Temperaturabhängigkeit der spezifischen isochoren Wärmekapazität von Luft ist es aber nahezu irrelevant, ob dabei für die Wärmekapazität der Reinstoffe die empirischen Korrelationen Gl. Q.23 und Gl. Q.24 aus [37] verwendet werden oder die zur Abschätzung herangezogenen konstanten, nominellen Werte (Kap. 4.2.3). Somit ist der Massenanteil des Naphthalin-Dampfs derart gering, dass die angenommene und im betrachteten Temperaturbereich deutlich variierende spezifische isochore Wärmekapazität keinen signifikanten Einfluss auf selbige des Gemisches hat. Folglich sind diesbezüglich auch die unterschiedlichen Teilchendurchmesser irrelevant. Bei der NSM ist die spezifische isochore Wärmekapazität des Naphthalin-Luft-Gemisches c_v daher annähernd die von Luft c_{v1} . Die Variation über einen Temperaturbereich von $\Delta T \approx 1$ K bei einem Niveau von $T \approx 300$ K ist im Falle des Gemisches kleiner als $0,004\%_{MW}$ und im Falle reiner Luft kleiner als $0,003\%_{MW}$. Die bei der Entdimensionierung der Gleichungen der SAM (Kap. 4.1.5) vorausgesetzte Konstanz der Prandtl- und der Eckert-Zahl sowie des Koeffizienten KI wird daher nicht durch die spezifische isochore Wärmekapazität gefährdet. Mit der Variation der Wärmekapazität schwankt die Wärmeleitfähigkeit des Gemisches laut ETM um $0,2\% + 0,004\% = 0,204\%_{MW}$ nur unwesentlich stärker als die dynamische Viskosität des Gemisches ($\approx 0,2\%_{MW}$) und ist damit auch als ausreichend konstant anzusehen. Ebenso ist der Einfluss des Massenanteils bei Temperaturen kleiner als $T = 310$ K generell vernachlässigbar. Oberhalb dieser Temperatur steigt er jedoch an und erzeugt bei $T = 350$ K eine Abweichung zur Wärmeleitfähigkeit reiner Luft von ungefähr $-6,7\%_1$. Die Temperaturvariation von $\Delta T = 1$ K führt dann nicht wie bei reiner Luft zu einer Wärmeleitfähigkeit-Schwankung von $0,14\%_{MW}$, sondern zu einer etwas erhöhten, aber immer noch vernachlässigbaren von $0,27\%_{MW}$. Selbst wenn die NSM mit unüblichen Temperaturen von $T > 310$ K aber unveränderten Differenzen von $\Delta T = 1$ K betrieben wird, ist die Wärmeleitfähigkeit des Gemisches ausreichend

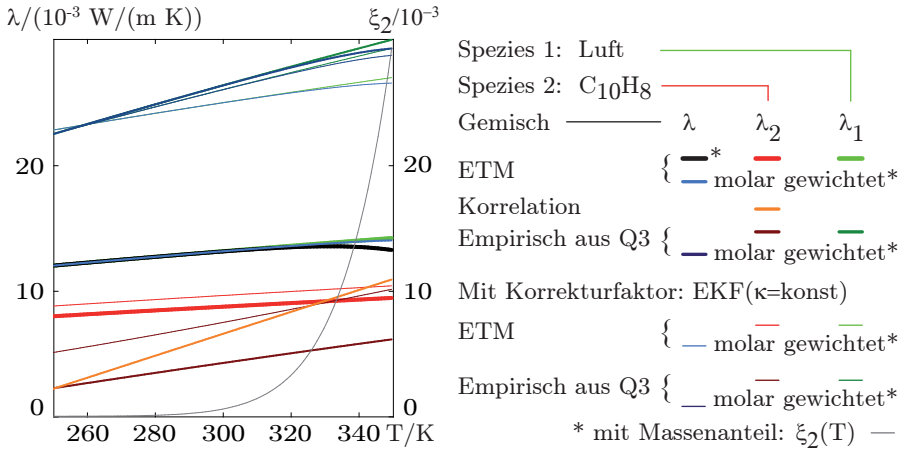


Abbildung 4.11.: Wärmeleitfähigkeit von Naphthalin-Dampf, Luft, -Gemisch
Quellen: Q1= [39], Q2= [40], Q3= [37]

konstant.

Anmerkung Das ETM zeigt für die Wärmeleitfähigkeit der Reinstoffe, unabhängig von der Art der verwendeten spezifischen Wärmekapazitäten, deutliche Abweichungen im Niveau und in der Temperaturabhängigkeit im Vergleich zu den empirischen Korrelationen, Gl. Q.30 und Gl. Q.29 aus [37] (siehe Abb. 4.11). Das Niveau der Wärmeleitfähigkeit von Luft wird etwa um den Faktor 2 unterschätzt. Dieses entspricht annähernd dem Korrekturwert 2,5, der von [36] und [41] zur Übertragung der Wärmeleitfähigkeit von ESM⁸ zum genaueren EBM angegeben wird. Für Luft liefert das ETM daher erwartungsgemäße Werte. Für Naphthalin-Dampf hingegen überschätzt das ETM die Wärmeleitfähigkeit etwa um den Faktor 2 gegenüber der empirischen Korrelation. Deren Gültigkeit darf jedoch bezweifelt werden, da sie nicht mit den tabellierten Werten aus [39] und Werten, welche aus einem von [42] angegebenen Diagramm abgelesen wurden, übereinstimmt (siehe Abb. 4.12). Diese Werte sind allerdings nur gültig für die Wärmeleitfähigkeit von Naphthalin-Dampf, welcher Temperaturen höher als die Schmelztemperatur $T_{C_{10}H_8,S} = 353 \text{ K}$ aufweist, also durch Verdampfung aus der flüssigen Phase entstanden ist. Die Quelle [37], aus der die empirische Korrelation stammt, gibt keine Einschränkung des Temperaturbereichs an und verweist auch nicht auf die eigentliche Quelle der Daten. Da jedoch dem Autor keine Veröffentlichung bekannt ist, die die Wärmeleitfähigkeit von Naphthalin-Dampf explizit bei einer Temperatur unterhalb der Schmelztemperatur angibt, also von Dampf, der durch Sublimation entstanden ist, kann die Qualität der empirischen Korrelation nicht überprüft werden. Es ist zu vermuten, dass diese gänzlich unbrauchbar ist.

⁸Es sei hier daran erinnert, dass das ETM für Reinstoffe dem ESM entspricht

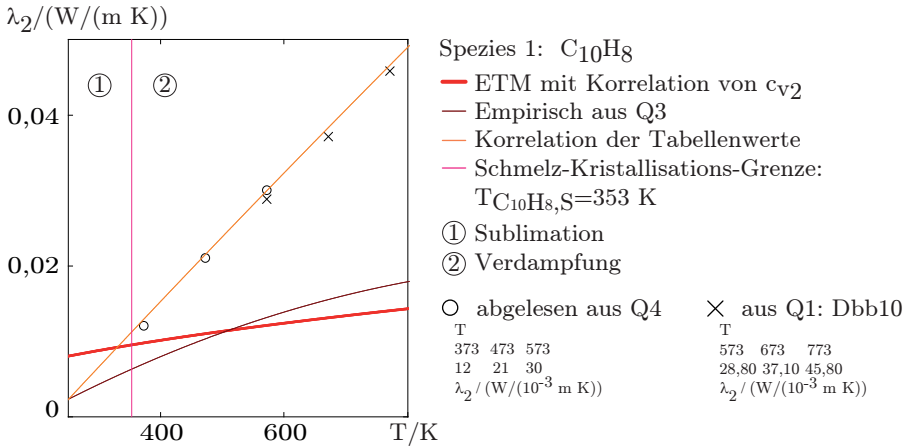


Abbildung 4.12.: Wärmeleitfähigkeit von Naphthalin-Dampf
Quellen: Q1= [39], Q3= [37], Q4= [42]

$$\lambda_{\text{Empirisch}} = c_{v,\text{EBM}} \cdot \eta_{\text{EBM}} \cdot EKF = \lambda_{\text{EBM}} \cdot EKF \quad (4.101)$$

$$EKF = \frac{9 \cdot \kappa - 5}{4} \quad (4.102)$$

Ein Indiz für die Gültigkeit dieser Vermutung liefert die oft verwendete Korrektur nach Eucken Gl. 4.101 aus [41]. Sie dient eigentlich zur Erweiterung des im Vergleich zum ETM genaueren EBM um den Einfluss unterschiedlicher Freiheitsgrade der Moleküle anhand eines Korrekturfaktors EKF . Der bereits angegebene Korrekturwert von 2,5 ist der Eucken-Korrekturfaktor für Teilchen mit drei Freiheitsgraden, also kugelförmigen Teilchen (siehe Gl. 4.104). Ist der Korrekturfaktor kleiner Eins, $EKF < 1$, so signalisiert die Korrektur, dass mindestens eine der drei Größen, λ , η , c_v , nicht zutreffend bestimmt ist. Im EKF wird die Anzahl an Freiheitsgraden FG durch den Isentropenexponenten κ , Gl. H.20, ausgedrückt und lässt sich entweder rein theoretisch aus der Molekülstruktur postulieren oder aus gemessenen Größen ableiten. Die theoretische Abschätzung erfolgt anhand der Anzahl der von außen feststellbaren Trägheiten eines Teilchens gemäß Gl. Q.32. Für Luft und Naphthalin ergeben sich dann die in Gl. 4.103 angegebenen Freiheitsgrade, Isentropenexponenten und Korrekturfaktoren. Zur experimentell basierten Feststellung der Freiheitsgrade dient das Äquipartitionstheorem Gl. 4.104, welches die Energie ϵ eines Teilchens auf dessen Freiheitsgrade aufteilt. Da die Teilchenenergie makroskopisch der inneren Energie u nach Gl. H.12 entspricht, lässt sich die Anzahl der Freiheitsgrade bestimmen durch die spezifische isochore Wärmekapazität und die spezifische Gaskonstante R . Beide Größen können aus Experimenten quantifiziert werden. Der Korrekturfaktor EKF und mit ihm auch der Isentropenexponent lässt sich jedoch für den jeweiligen Reinstoff auch aus den

empirischen Werten für Wärmeleitfähigkeit, spezifische isochore Wärmekapazität und dynamische Viskosität mittels Gl. 4.105 bestimmen. Er ist dann eine Funktion der Temperatur $EKF(T)$.

Luft	Zweiatomig	(4.103)
	$FG_1 = 3 + 2 + FG_{\text{Oszillation}} \in [5; 6]$	
	$\kappa_1 \in [1, \bar{3}; 1, 4]$	
	$EKF_1 \in [1; 1, 9]$	
$C_{10}H_8$	Doppelring-Molekül mit 19 Bindungen à 2 FG	
	$FG_2 = 3 + 3 + FG_{\text{Oszillation}} \in [6; 44]$	
	$\kappa_2 \in [1, 0\bar{4}\bar{5}; 1, \bar{3}]$	
	$EKF_2 \in [1, 102; 1, 74\bar{9}]$	
Idealteilchen	Kugelförmig	
	$FG_{\text{Kugel}} = 3$	
	$\kappa_{\text{Kugel}} = 1, \bar{6}$	
	$EKF_{\text{Kugel}} = 2, 5$	

$$e = \frac{FG \cdot k_B \cdot T}{2} \equiv u = c_v \cdot T \Rightarrow FG = \frac{2 \cdot c_v}{R} \quad (4.104)$$

$$EKF = \frac{\lambda_{\text{empirisch}}}{c_{v,\text{empirisch}} \cdot \eta_{\text{empirisch}}} \quad (4.105)$$

In Abb. 4.13 sind die auf mehrfache Weisen bestimmten Korrekturfaktoren für Luft und Naphthalin-Dampf sowie dem Gemisch aus beiden, im Temperaturbereich $T \in [250; 350]$ K graphisch veranschaulicht. Für reine Luft liegt der Korrekturfaktor etwa bei 1,9 unabhängig von der Temperatur und davon, ob er mit nomineller spezifischer Wärmekapazität, mit der empirischen Korrelation der spezifischen Wärmekapazität oder aus den empirischen Korrelationen für λ , η , c_v berechnet wird. Dieser Faktor stimmt sehr gut mit dem theoretischen Wert von exakt 1,9 für nicht angeregte, gegenseitige Oszillation der Atome des Moleküls überein (siehe Gl. 4.103). Daher zeigen auch die unterschiedlichen Bestimmungen des Isentropenexponenten eine gute Übereinstimmung und liefern einen Wertebereich von $\kappa \in [1, 397; 1, 420]$ (siehe Abb. 4.14). Für Naphthalin-Dampf hingegen zeigen nur die Korrekturfaktoren, die mit den Freiheitsgeraden aus der spezifischen isochoren Wärmekapazität (Gl. 4.104) bestimmt werden, eine Übereinstimmung im Niveau. Der sich aus den theoretischen Freiheitsgraden ohne Oszillation ergebende Wert liegt mit $EKF = 1,75$ deutlich höher. Es ist daher zu vermuten, dass real nicht nur die Freiheitsgrade der Translation und Rotation die innere Energie von Naphthalin-Dampf darstellen, sondern auch ein Teil auf die gegenseitige Schwingung der Atome des Moleküls entfällt. Ein Korrekturfaktor, wie er mit der nominellen isochoren Wärmekapazität von $EKF \approx 1,117$ ermittelt wird, ent-

spricht etwa 39 angeregten Freiheitsgraden, also 33 Oszillationen, sowie einem Isentropenexponenten von $\kappa \approx 1,052$. Diese vergleichsweise hohe Anzahl wird durch einige Veröffentlichungen zum Raman-Spektrum von Naphthalin gestützt, die ähnlich viele Vibrationsfreiheitsgrade⁹ vermuten lassen; im kristallinen Zustand etwa 26 (aus [43]) und im flüssigen Zustand bei 371 K etwa 48 (aus [44]). Dahingegen weicht der anhand der empirischen Korrelationen mittels Gl. 4.105 ermittelte Korrekturfaktor nicht nur deutlich von den zuvor genannten Werten ab, sondern liegt auch unterhalb von Eins $EKF < 1$. Dieses entspricht einem Isentropenexponenten von kleiner Eins $\kappa < 1$, was einer negativen Anzahl an Freiheitsgraden entspricht und folglich unphysikalisch ist. Ursache hierfür kann nur die empirische Korrelation zur Wärmeleitfähigkeit von Naphthalin-Dampf sein, da die spezifische isochore Wärmekapazität und die dynamische Viskosität, wie zuvor gezeigt, als zutreffend bestimmt angesehen werden können. Die Vermutung, dass die Korrelation unbrauchbar ist, dürfte damit bestätigt sein. Um trotzdem einen Anhaltspunkt für die reale Wärmeleitfähigkeit von Naphthalin-Dampf zu erhalten, wird die Eucken-Korrektur Gl. 4.101 sowohl auf die Vorhersage des ETM als auch auf das Produkt der empirischen Korrelationen von c_v und η angewendet. Der Korrekturfaktor wird im Falle von Luft zu jenem konstant angenommen, der sich aus den theoretischen Freiheitsgraden ohne Oszillation ergibt (Gl. 4.103). Für den Naphthalin-Dampf hingegen werden die theoretischen Oszillationsfreiheitsgrade vollständig im Korrekturfaktor berücksichtigt. Ergänzend zu den bereits diskutierten Wärmeleitfähigkeiten sind in Abb. 4.11 die Ergebnisse dieses Vorgehens visualisiert. Für Luft weicht die Wärmeleitfähigkeit nach der Korrektur nicht nennenswert von der empirischen Korrelation der Wärmeleitfähigkeit ab. Auch das vom ETM vorhergesagte Niveau der Wärmeleitfähigkeit stimmt nach der Korrektur mit der empirischen Korrelation annehmbar überein. Die Eucken-Korrektur funktioniert daher nicht nur für das EBM, sondern auch für das ETM mit ausreichender Genauigkeit. Für die Wärmeleitfähigkeit des Naphthalin-Dampfes zeigt das korrigierte ETM, wie auch das korrigierte Produkt $c_v \cdot \eta$, eine Erhöhung von $EKF(\kappa_2 \hat{=} 1,045) - 1 \approx +10,2\%$. Dadurch gleicht sich das Niveau beider Vorhersagen auf einen ausreichend genauen Wert an. Bei Temperaturen nahe des Schmelzpunktes $T \in [340; 353]$ K entspricht die so ermittelte Wärmeleitfähigkeit fast jener, die durch Extrapolation der empirischen Korrelation für Naphthalin-Dampf oberhalb der Schmelztemperatur vorhergesagt wird. Es ist daher zu vermuten, dass die hohe Anzahl an relevanten Freiheitsgraden des Naphthalin-Moleküls zutreffend ist. Als vertrauenswürdigstes Modell für die Wärmeleitfähigkeit von Naphthalin-Dampf wird daher das korrigierte ETM angenommen. Für das Gemisch lässt sich das ETM durch die Eucken-Korrektur nicht ohne weitere Annahmen korrigieren. Allerdings interessiert für die Konstanz der Wärmeleitfähigkeit des Gemisches im Stoff-System nur deren Änderung im Temperaturbereich $T \pm \Delta T/2 \in [295,5; 300,5]$ K. Diese lässt sich durch den vernachlässigbaren Einfluss des Massenanteils auch aus den molar gewichteten Wärmeleitfähigkeiten der Reinstoffe entnehmen. Die so gewonnene Variation der Wärmeleitfähigkeit des Gemisches erhöht sich durch die Eucken-Korrektur von etwa 0,15% auf zirka 0,16% und bleibt damit vernachlässigbar. Ferner variiert in diesem Temperaturbereich der Isentropen-

⁹ Anzumerken ist hierbei, dass der jeweilige Freiheitsgrad nicht vollständig auf die Energie $1/2 \cdot k_B \cdot R$ angeregt sein muss.

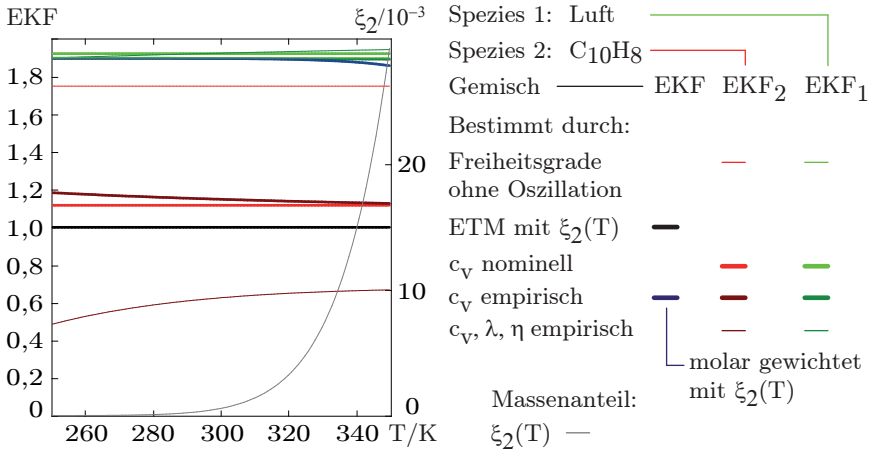


Abbildung 4.13.: Eucken Korrektur-Faktor von Naphthalin-Dampf, Luft, -Gemisch

exponent des Gemisches um vernachlässigbare 0,003%_{MW} und ist mit $\kappa = 1,399$ fast identisch mit dem theoretischen Wert $\kappa = 1,4$ für Luft als zweiatomiges Molekül mit fünf Freiheitsgraden. Die bei der Entdimensionierung der Gleichungen der SAM (Kap. 4.1.5) vorausgesetzte Konstanz der Prandtl- und Eckert-Zahl wird daher nicht durch den Isentropenexponenten gefährdet. Allerdings ist die Annahme von kugelförmigen und daher nur drei wirksame Freiheitsgrade zeigenden Teilchen **P. 11**, die folglich einen Isentropenexponenten von $\kappa = 1,6$ besitzen, nicht erfüllt. Durch die Vernachlässigung der zwei Freiheitsgrade der Fluide der SAM liefern alle Modelle, die auf der 1/6 Verteilung beruhen, also auch das ETM, Werte für die Materialkoeffizienten, die von den experimentell bestimmten abweichen. Lediglich für die Wärmeleitfähigkeit der Reinstoffe lässt sich diese Abweichung durch die Eucken-Korrektur quantifizieren und minimieren. Für die dynamische Viskosität, die spezifische isochore Wärmekapazität und den im Folgenden noch diskutierten Diffusionskoeffizienten kann die Abweichung nicht analytisch korrigiert werden. Das vom ETM vorhergesagte Niveau dieser Größen ist daher nicht aussagekräftig.

Schlussfolgerung Da die Veränderung der spezifischen isochoren Wärmekapazität im jeweilig betrachteten System und Temperaturbereich keinen nennenswerten Einfluss hat, können die in Kap. 4.2.5 getroffenen Schlussfolgerungen bezüglich der Viskosität direkt auf die Wärmeleitfähigkeit übertragen werden. Folglich ist die Bedingung von räumlich konstanter Wärmeleitfähigkeit **P. 14** für das Stoff-System sehr gut erfüllt, sofern die Temperaturen unterhalb von $T = 310$ K liegen und nicht mehr als $\Delta T \approx 1$ K variieren (siehe Abb. 4.11). Für diese Aussage muss die Bestimmung des Massenanteils vom Naphthalin-Dampf nach [6] die Realität ausreichend abbilden. Im Heißgas-System allerdings variiert die Wärmeleitfähigkeit temperaturbedingt räumlich mit 7,5%_{MW} derart stark, dass sie nur im Falle annähernd analoger räumlicher Verteilung des Diffusionskoeffizienten im Stoff-System für die WSA als konstant an-

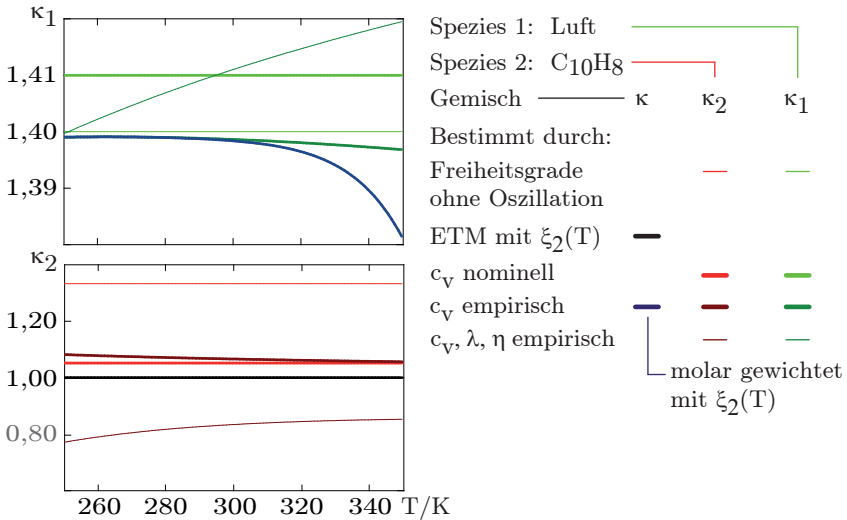


Abbildung 4.14.: Isentropenexponent von Naphthalin-Dampf, Luft, -Gemisch

gesehen werden kann. Jedoch selbst dann ist mit einer Übertragungsunsicherheit von Wärme- und Stofftransport von 15%_{MW} zu rechnen.

Bedingung des konstanten Diffusionskoeffizienten

Aus dem ETM Gl. 4.95 folgt für

$$\Lambda = j_{12}^* \wedge \Phi = \xi_1 \wedge j_{12}^* = \rho D \frac{d\xi_1}{dy}$$

die Abhängigkeit des Diffusionskoeffizienten von der Temperatur, den Teilchenmassen und -durchmessern sowie -dichten zu Gl. 4.106. Es ist leicht ersichtlich, dass das ETM eine Schmidt-Zahl (Gl. 4.36) von $Sc = 1$ liefert. Experimentelle Werte der Schmidt-Zahl liegen nach [36] für Gase bei einer Temperatur $T \approx 300$ K bei etwa $Sc \approx 0,7...0,75$. Folglich dürfte der in Abb. 4.15 gezeigte Diffusionskoeffizient für das Naphthalin-Luft-Gemisch, berechnet durch das ETM, um 25%...30% unterschätzt werden, sofern die Vorhersage des ETM bezüglich der Viskosität als korrekt angenommen wird.

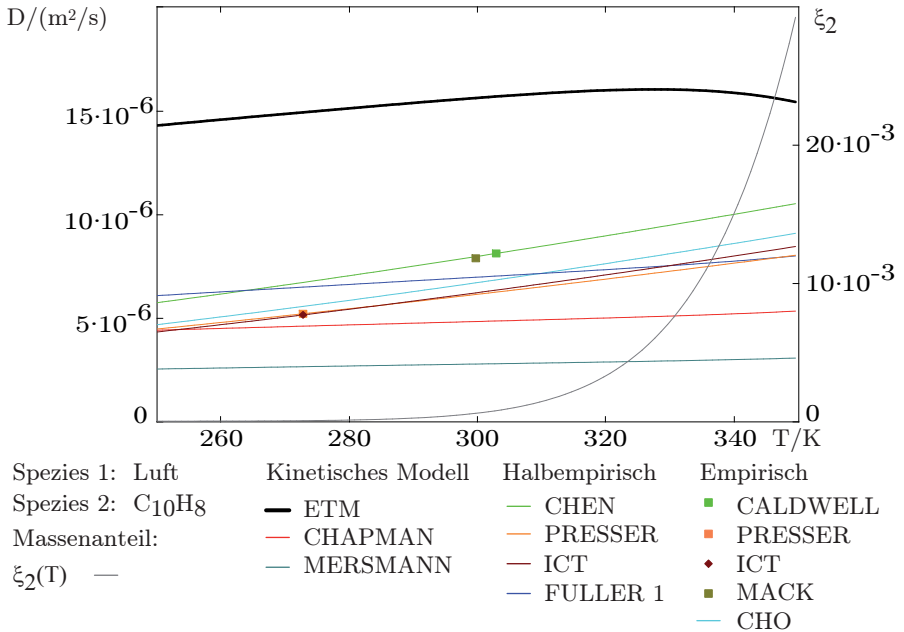


Abbildung 4.15.: Diffusionskoeffizient beim Naphthalin-Luft-Gemisch
 Quellen: siehe Text

$$D \stackrel{\text{ETM}}{=} \frac{\eta}{\rho}$$

$$= \frac{\sqrt{3k_B T [n_1 + n_2]}}{3\pi \sqrt{n_1 \cdot m_1 \cdot \left(\sigma_1^2 \cdot n_1 + \frac{n_2}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2\right)^2 + n_2 \cdot m_2 \cdot \left(\sigma_2^2 \cdot n_2 + \frac{n_1}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2\right)^2}}$$

entspricht Gl. P.3 (4.106)

Vergleich Die unterschätzende Tendenz wird allerdings von keinem anderen Modell und auch keiner empirischen Korrelation zur Quantifizierung des Diffusionskoeffizienten bestätigt (siehe Abb. 4.15, die Gleichungen aller Modelle und Korrelationen sowie die verwendeten Werte finden sich in Kap. Q.5). Vielmehr liefern alle anderen Bestimmungsmethoden deutlich geringere Diffusionskoeffizienten als das ETM, wobei diese zugleich einen großen Wertebereich abdecken. Wie bereits erwähnt, ist das vom ETM vorhergesagte Niveau eines Materialkoeffizienten nicht aussagekräftig und für die Konstanz des Diffusionskoeffizienten bei der NSM ist dessen Niveau auch irrelevant. Jedoch zeigt der nachfolgende Vergleich der verschiedenen Modelle und

Korrelationen, dass der Diffusionskoeffizient eines Naphthalin-Luft-Gemisches noch nicht eindeutig quantifiziert worden ist.

Die rein theoretischen, auf der Gaskinetik beruhenden Modelle, CHAPMAN und MERSMANN, sagen die geringsten Diffusionskoeffizienten und die kleinsten Temperaturabhängigkeiten voraus, weichen jedoch selbst um zirka 45%_{CHAPMAN} voneinander ab (siehe Abb. 4.15). Das Modell mit den kleinsten Fehlern zu experimentellen Werten, verglichen mit anderen theoretischen und halbempirischen Modellen, liefert laut [45] das Modell FULLER (Gl. Q.8 aus [46]). Allerdings zeigt dieses Abweichungen zu den Messwerten von bis zu etwa -21%_{FULLER}. Die alternativen halbempirischen Modelle, CHEN (Gl. Q.14 aus [47]), PRESSER (Gl. Q.13 aus [6]) und ICT (Gl. Q.12 aus [48]), zeigen etwas größere relative Abweichungen untereinander und zu den Messwerten, mit Ausnahme jener, die jeweils als Stützwert¹⁰ verwendet werden. Auch die rein experimentelle Korrelation CHO (Gl. Q.11 aus [51]), welche auf 59 Einzelmessungen im Temperaturbereich $T \in [274,6; 327,1]$ K basiert, zeigt Abweichungen zu den anderen experimentellen Werten von bis zu 20%_{CHO}. Die Streuung der experimentellen Ergebnisse ist jedoch, verglichen mit den Abweichungen zu den theoretischen Modellen, gering. Dieses dürfte an den ähnlichen experimentellen Vorgehensweisen und den dabei identisch getroffenen Annahmen liegen. Vor allem das treibende und damit maßgebende Konzentrationsgefälle, um den Diffusionskoeffizienten experimentell zu quantifizieren, wird in allen Fällen auf gleiche Art postuliert. So wird die partielle Massendichte des Naphthalin-Dampfs in der Luft, direkt an der Oberfläche des als Feststoff vorliegenden Naphthalins, aus dem Dampfdruck und unter der Annahme von thermisch idealem Gas bestimmt. Es ergibt sich nach [6] der bereits bei den anderen Materialkoeffizienten verwendete und in Abb. 4.15 dargestellte Verlauf des Massenanteils des Naphthalin-Dampfs ξ_2 . Für den Dampfdruck werden dabei ebenfalls experimentelle Korrelationen verwendet. Die Gleichsetzung von partiellem Druck und Dampfdruck ist jedoch nur dann korrekt, wenn Gleichgewicht der Phasen vorliegt, die Naphthalin-Kristalle also netto nicht sublimieren und damit auch kein Nettodiffusionsstrom existiert. Dieses widerspricht dem eigentlichen Messwert der Experimente, dem tatsächlich vorliegenden Nettostoffstrom. Begründet wird dieses Paradoxon dadurch, dass die Differenz von Dampfdruck und partiellem Druck an der Oberfläche eines Naphthalin-Kristalls, im Weiteren auch als Sublimationsdruckgefälle bezeichnet, wesentlich kleiner ist als die Differenz von jenem partiellen Druck nahe des Kristalls zu jenem hinreichend weit entfernt von diesem, im Weiteren auch als Diffusionsdruckgefälle bezeichnet. Die Wirkung des treibenden Konzentrations- beziehungsweise Partialdruckgefälles (Diffusionsdruckgefälle) wird also ohne Nachweis als viel stärker angenommen, als die Abweichung vom Gleichgewicht (Sublimationsdruckgefälle). Ist dem im Experiment nicht so gegeben, wird der tatsächliche Diffusionskoeffizient folglich größer sein, da das reale Diffusionsdruckgefälle kleiner ist als angenommen. Eine ausführlichere Diskussion dieser Thematik erfolgt in Kap. 5.1.2. An dieser Stelle sei nur festgehalten,

¹⁰Zu beachten ist hierbei, dass der Stützwert PRESSER, welcher aus [6] stammt, aus [48] falsch zitiert wird und er eigentlich dem Stützwert ICT entspricht. Ebenso ist der Stützwert CALDWELL für das Modell CHEN eine in [49] vorgenommene Korrektur des Wertes MACK aus [50].

dass das Niveau der experimentell bestimmten Diffusionskoeffizienten möglicherweise durch die Postulierung des treibenden Konzentrationsgefälles unterschätzt wird. Weiterhin wird die Temperaturabhängigkeit des Diffusionskoeffizienten von den experimentellen Modellen ähnlich und in der Art

$$T^b \forall b \in [1,75;2,00]$$

vorhergesagt. Auch hier kann die Postulierung des Diffusionsdruckgefälles einen verfälschenden Einfluss haben. Allerdings zeigen auch die theoretischen und halbempirischen Modelle, abgesehen vom Modell MERSMANN, eine tendenziell ähnliche Abhängigkeit des Diffusionskoeffizienten von der Temperatur, in der Art

$$T^b \forall b \in [0,50;1,75]$$

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass nur die Modelle CHO, PRESSER und ICT eine vertretbare, aber möglicherweise durch den systematischen Fehler der Postulierung des Sublimationsdruckgefälles hervorgerufene, Abweichung von etwa 20% zeigen. Der tatsächliche Diffusionskoeffizient und dessen Temperaturabhängigkeit des Naphthalin-Luft-Gemisches muss daher als nahezu unbekannt erachtet werden. Folglich fehlt die Validierungsmöglichkeit für die Vorhersage des ETM bezüglich des Diffusionskoeffizienten. Jedoch ist das ETM das einzige Modell, dass die unterschiedlichen Teilchengrößen und die Massenanteile berücksichtigt. Um diesen Einfluss von Massenanteil und Molekülgröße abschätzen zu können, dürfte der qualitative Vergleich der Ergebnisse des ETM mit denen der anderen Modelle ausreichend sein, obwohl das Niveau des Diffusionskoeffizienten in jedem Modell stark unterschiedlich ist.

Diffusionskoeffizient bei der SAM Laut dem ETM ist der Diffusionskoeffizient des Naphthalin-Luft-Gemisches bis zu einer Temperatur von $T \approx 310$ K annähernd proportional zur Temperatur. Oberhalb dieser Temperatur verringert sich der Diffusionskoeffizient mit steigender Temperatur nichtlinear und erreicht bei $T = 350$ K einen um etwa 3,7%_{330 K} geringeren Wert als das Maximum bei $T \approx 330$ K. Dieses Abflachen ist bei allen anderen Modellen nicht vorhanden, da es sich dabei um den Einfluss des mit der Temperatur steigenden Massenanteils ξ_2 des Naphthalin-Dampfes handelt. Diese Konzentrationsabhängigkeit stellt einen großen Anteil der Temperaturabhängigkeit dar und ist in der Lage, den Diffusionskoeffizienten trotz Erhöhung der Temperatur zu verringern. Allerdings ist dieser Effekt im Vergleich zur Abweichung der Modelle untereinander vernachlässigbar klein, sodass die in [52] getroffene Annahme eines für technisch relevante Systeme konzentrationsunabhängigen Diffusionskoeffizienten gerechtfertigt scheint. Selbst wenn die Abhängigkeit vom Massenanteil durch das ETM richtig vorhergesagt wird, ist dieser Einfluss bei der NSM vernachlässigbar, da während der Experimente die Temperaturen unterhalb von $T = 310$ K liegen. Aufgrund der von den Modellen nicht eindeutig vorhergesagten Temperaturabhängigkeit der Art

$$T^b \forall b \in [0,50;2,00]$$

verfälscht das Einbeziehen der während eines Experiments im Stoff-Systems vorherrschenden Temperatur, wie es in [6] und vielen anderen Veröffentlichungen durchgeführt wird, die Messergebnisse willkürlich. Zur Erhaltung der Nachvollziehbarkeit ist es daher sinnvoller, einen für alle Experimente gleichen Diffusionskoeffizienten zu postulieren, auch wenn dieser nicht immer dem real vorliegenden entspricht. Sofern in allen Experimenten die Temperaturen annähernd gleich und räumlich konstant sind und die Diffusionsdruckgefälle ebenfalls als identisch angenommen werden, dürfte dieses Vorgehen gerechtfertigt sein. Allerdings erfüllt es formal nicht die in Kap. 4.2.2 diskutierte und für die WSA zwingend zu erfüllende Bedingung

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}(D\rho)}_{\text{Stoff-System}} \stackrel{!}{\sim} \underbrace{\frac{\partial \lambda}{\partial x}}_{\text{Heißgas-System}}$$

da die Massendichte ρ als konstant postuliert wird, jedoch die Wärmeleitfähigkeit λ bei repräsentativen Bedingungen um zirka 7,5%_{MW} über die Temperaturgrenzschicht variiert. Die größte zu erwartende Schwankung des Diffusionskoeffizienten über die Konzentrationsgrenzschicht tritt bei der Temperaturabhängigkeit T^2 auf. Sie ist mit etwa 0,7%_{MW}, wie zur Steigerung der Vergleichbarkeit angenommen, vernachlässigbar und wesentlich kleiner als die der Wärmeleitfähigkeit. Die WSA und damit auch die Übertragung von Wärme- und Stoffübergangskoeffizient (Gl. 2.1, Gl. 2.2) zeigt daher eine Unsicherheit von mindestens $\pm 3,75\%$.

Anmerkung In der bei der SAM verwendeten Form des Diffusionskoeffizienten sind die Anteile der Thermo- und Druckdiffusion bisher ohne Nachweis vernachlässigt (siehe Term B und D in Gl. H.27). Da die Annahme gleich schwerer Teilchen P_{18} beim Naphthalin-Luft-Gemisch nicht erfüllt ist und weiterhin nicht bestimmt werden kann, ob die Bedingungen nach Isothermie und Isobarität durch die repräsentativen Werte des Stoff-Systems hinreichend erfüllt sind, muss zur Vernachlässigung der Druck- und Thermodiffusion deren Größenordnung deutlich kleiner sein, als die der Konzentrationsbedingten Diffusion.

$$\frac{\partial \ln(p)}{\partial x_i} \quad \circ \bullet \quad \frac{\ln(p|_{x=0}) - \ln(p|_{x=\delta_\xi})}{\delta_\xi} \quad (4.107)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{n_n}{n} \right) \quad \circ \bullet \quad \frac{n_{2,nom,x=0} - n_{2,nom,x=\delta_\xi}}{\delta_\xi} \quad (4.108)$$

Für die Druckdiffusion lässt sich diese Abschätzung vollständig durchführen, da sie denselben Koeffizienten $D_{ns,i}$ besitzt wie die konzentrationsgetriebene Diffusion. Hierzu wird der im Term B (siehe Gl. H.27) enthaltene Gradient durch die Druckänderung über die Konzentrationsgrenzschicht δ_ξ gemäß Gl. 4.107 linear angenähert. Die Approximation des Gradienten in Term A (siehe Gl. H.27) erfolgt durch die Konzentrationsänderung über die Konzentrationsgrenzschichtdicke mit Gl. 4.108. Für die quantitative Abschätzung werden neben den in Kap. 4.2.3 angegebenen auch

nachfolgend aufgelistete, repräsentative Werte verwendet. Anzumerken ist hierbei, dass der Druck am Rand der Konzentrationsgrenzschicht $p|_{x=\delta_\xi}$ angenommen wird zu jenem Druck an der Wand, vermindert um den dynamischen Druck und die Zentrifugalwirkung. Dieses dürfte die maximale Druckänderung über die Grenzschicht in einem rotierenden Strömungskanal sein und wird nur auf Wänden auftreten, deren Normalenvektor radial nach außen zeigt.

$$\begin{array}{ll}
 \delta_\xi & \approx L_{char} \approx 10^{-2} \text{ m} \\
 p|_{x=0} & \hat{=} 10^5 \text{ Pa} \\
 p|_{x=\delta_\xi} & \stackrel{!}{=} p|_{x=0} \\
 & - \frac{w_{char}^2 \cdot \rho_{nom}}{2} - \rho_{nom} \omega^2 L_{char} \\
 & \hat{=} 10^5 \text{ Pa} - 15 \text{ Pa} - 30 \text{ Pa} \\
 & = 0,999.55 \cdot 10^5 \text{ Pa} \\
 n_{1,nom}|_{x=0} & = 24.096 \cdot 10^{21} \text{ 1/m}^3 \\
 n_{2,nom}|_{x=0} & = 3 \cdot 10^{21} \text{ 1/m}^3 \\
 n_{nom}|_{x=0} & = n_{1,nom}|_{x=0} + n_{2,nom}|_{x=0} \\
 & = 24.099 \cdot 10^{21} \text{ 1/m}^3 \\
 n_{2,nom}|_{x=\delta_\xi} & = 0 \text{ 1/m}^3 \\
 \rho_{1,nom}|_{x=0} & = n_{1,nom}|_{x=0} \cdot m_1 \\
 & = 1,2 \text{ kg/m}^3 \\
 \rho_{2,nom}|_{x=0} & = n_{2,nom}|_{x=0} \cdot m_2 \\
 & = 6,8 \cdot 10^{-4} \text{ kg/m}^3 \\
 \rho_{nom}|_{x=0} & = \rho_{1,nom}|_{x=0} + \rho_{2,nom}|_{x=0} \\
 & = 1,2008 \text{ kg/m}^3
 \end{array}$$

Die quantitative Abschätzung, Gl. 4.109, bestätigt die Annahme **P. 19** von vernachlässigbarer Druckdiffusion, sofern die Druckänderung über die Konzentrationsgrenzschicht in der Größenordnung von $\mathcal{O}(\Delta p) = 100 \text{ pa}$ liegt. Erst wenn die Änderung zirka 25% des Drucks an der Wand erreicht, also etwa 25.000 Pa, ist die druckgetriebene Diffusion gleichwertig mit der konzentrationsgetriebenen. Dieses gilt jedoch nur für den Anteil, den der Naphthalin-Dampf liefert. Die Teilchen der Luft unterliegen dann noch nicht signifikant der Druckdiffusion. Derartig hohe Druckgradienten dürften nur in wenigen technischen Fällen auftreten und dann auch nicht die Untersuchung mittels SAM bedingen. Die Druckdiffusion ist bei der SAM daher vernachlässigbar und die Annahme **P. 19** gerechtfertigt.

$$\begin{array}{l}
 \underbrace{\left| \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{n_n}{n} \right) \right|}_{\text{zu A}} \gg \underbrace{\left| \frac{\partial \ln(p)}{\partial x_i} \left[\frac{n_n}{n} - \frac{\rho_n}{\rho} \right] \right|}_{\text{zu B}} \quad (4.109) \\
 99,987.5 \text{ 1/m} \gg 0,000.02 \text{ 1/m} \quad \text{Für } n_n = n_1 \\
 0,012 \text{ 1/m} \gg 0,000.02 \text{ 1/m} \quad \text{Für } n_n = n_2 \\
 \mathcal{O}(\text{TermA}) = \mathcal{O}(\text{TermB}) \\
 \forall p|_{x=\delta_\xi} = \exp \left(\frac{\delta_\xi \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{n_n}{n} \right)}{\frac{n_n}{n} - \frac{\rho_n}{\rho}} \right) \cdot p|_{x=0} \approx 0,75 \cdot p|_{x=0}
 \end{array}$$

Im Gegensatz zur druck- und konzentrationsgetriebenen Diffusion wird die Thermodiffusion durch einen eigenen, für Naphthalin dem Autor nicht bekannten Koeffizienten $D_{n,i}^T$ determiniert. Daher lässt sich die Größe des entsprechenden Term D nicht voll-

ständig abschätzen. Allerdings zeigen Untersuchungen [53] zum Soret-Koeffizienten

$$S_T = \frac{D_{x_w}}{D_{\text{Thermodiffusion}}}$$

von Molekülen, die dem Naphthalin-Molekül sehr ähnlichen sind, dass die Thermodiffusion nur einen Anteil von etwa $10^{-3} / \text{K}$ an der effektiven Diffusion hat. Damit ist zu vermuten, dass die Annahme von vernachlässigbarer Thermodiffusion **P. 21** gerechtfertigt ist. Ein Beweis hierfür kann in dieser Arbeit nicht erbracht werden.

Einfluss der Druckschwankung auf den Stofftransport Bei der Abschätzung des Einflusses der Geschwindigkeitsdivergenz auf die innere Energie des Stoff-Systems im GF II in Kap. 4.2.3 folgt die angenommene, repräsentative Temperaturschwankung von $\Delta T = 1 \text{ K}$ aus einer Druckvariation von 625 Pa. Diese verursacht, bei Annahme der maximal gefundenen Temperaturabhängigkeit T^2 , eine vernachlässigbar kleine Schwankung des Diffusionskoeffizienten von ungefähr $0,7\%_{\text{MW}}$. Sofern das Druckfeld des Stoff-Systems räumlich wie zeitlich nur Variationen von kleiner 600 Pa aufweist, ist deren Einfluss auf den Stoffübergang daher irrelevant.

Schlussfolgerung Die Bedingung eines räumlich und zeitlich konstanten Diffusionskoeffizienten des Naphthalin-Luft-Gemisches **P. 20** kann mangels eindeutigen Vorhersagemodell nicht abgeschätzt werden. Der Einfluss des Massenanteils ζ_2 und der Temperatur T ist zu ungenau bekannt, um durch das Einbeziehen dieser Größen eine erhöhte Aussagequalität zu erreichen. Als einziger Ausweg bleibt die Notwendigkeit, die Temperaturen und das treibende Diffusionsdruckgefälle im Stoff-System räumlich sowie über alle Experimente konstant zu halten. Hiermit wird auch der Einfluss einer etwaigen Thermodiffusion so gering gehalten wie möglich. Zur Beschreibung des Stoffübergangs ist dann ein willkürlicher, aber für alle Experimente gleicher Diffusionskoeffizient zu verwenden, um Missinterpretationen auszuschließen.

4.2.6. Folge aus den Vereinfachungen

Die Erkenntnisse aus der vorangegangenen Diskussion und Abschätzung zur Gültigkeit aller getroffenen Postulate sind in Tab. 4.1 zusammengefasst. In dieser Übersicht nicht detailliert enthalten sind die in der Einleitung von Kap. 4.2 bereits ohne quantifizierbaren Beweis als zutreffend erachteten Postulate **P. 1** bis **P. 9** sowie **P. 22**. Die Gültigkeit der Annahmen wird dabei durch die nachfolgend erläuterten acht Kennzeichnungen vereinfacht angegeben. Diese beruhen auf der jeweiligen Unsicherheit des betreffenden Postulats, welche entweder als Schwankung um den Mittelwert $\%_{\text{MW}}$ oder als Größenordnungsfaktor bezüglich eines interessierenden Effekts ebenfalls aufgeführt ist. Existiert eine relevante Schlussfolgerung aus der Abschätzung, ist diese verbal und sofern möglich auch quantitativ angegeben.

Fazit Die Übereinstimmung der notwendigen Annahmen zur Gültigkeit der SAM mit den real vorliegenden Bedingungen ist teilweise nicht gegeben oder kann nicht

!	: ohne Beweis als zutreffend erachtet	GF I	: nur gültig für GF I
↯	: nicht zutreffend	GF II	: nur gültig für GF II
✓	: zutreffend abgeschätzt	HS	: nur gültig im Heißgas-System
?	: unbekannt	SS	: nur gültig im Stoff-System

abgeschätzt werden. Eine abschließende Quantifizierung der gesamten Ungenauigkeit der SAM mit Berücksichtigung aller einzelnen Aspekte wie die Strömungsskalierung, die WSA und die Materialgesetze sowie deren Koeffizienten, ist daher mit rein theoretischen Betrachtungen nicht allgemeingültig möglich. Allein durch die Gegenüberstellung experimentell gewonnener Ergebnisse, bei definiert variierten Bedingungen sowohl im Stoff- als auch im Heißgas-System, wird die Unsicherheit quantifizierbar und damit als Ungenauigkeit der SAM angebbar sein. Beispielsweise würde die Bestimmung des Wärmeübergangs im Heißgas-System bei unterschiedlichen Temperaturniveaus und -differenzen den Einfluss der um $\pm 3,75\%$ varrierenden Wärmeleitfähigkeit ermöglichen. Der Vergleich zum nahezu konstanten Diffusionskoeffizienten ließe dann quantitative Rückschlüsse auf das Zutreffen der WSA zu. Ebenso würde diese Untersuchung zeigen, ob die Unsicherheit der Reynolds-Zahl-Skalierung von $\pm 3,15\%$ aufgrund temperaturbedingter, räumlich unterschiedlicher Viskosität einen ausreichend großen Einfluss auf die Wandschubspannungen hat, so dass sich je nach Temperaturdifferenz unterschiedliche Wärmeübergangskoeffizienten einstellen. Der Vergleich zum Stoffübergangskoeffizienten im Stoff-System, welcher sich durch eine Strömung mit nahezu konstanter Viskosität ergibt, relativierte dann die Angabe der Ungenauigkeit der WSA im Bezug auf den Einfluss nicht identischer Strömungen. Es wären jedoch zu jedem, nicht als erfüllt angesehenen Postulat umfangreiche Variationsstudien notwendig, um die gesamte Ungenauigkeit der SAM zu bestimmen. Dieser Aufwand ist aus wissenschaftlicher Sicht gerechtfertigt. Trotz den Genauigkeitsforderungen von etwa $\pm 3\%$, welche sich bei der Entwicklung von technischen Anwendungen stellen (siehe Kap. 2.3), wird er allerdings nur selten als notwendig erachtet und führt zwangsläufig zur Akzeptanz der Unsicherheiten. Vor diesem Hintergrund werden viele Untersuchungen mit Schwerpunkt auf einzelnen Aspekten, wie beispielsweise Wärmeübergang oder Strömungsablösung, ohne die Klärung der Unsicherheit durchgeführt und die Ergebnisse in empirischen Korrelationen zusammengefasst. Deren quantifizierbare Gültigkeitsbereiche können sich dabei nur auf die untersuchten Parameter beschränken. Weder die Übertragbarkeit noch die Erkenntnismöglichkeit aus derartigen Korrelationen ist daher gegeben.

Für die Transferfunktion f_t Gl. 4.110 der SAM zur Übertragung von Wärme- und Stofftransport lässt sich allerdings nach Gl. 4.111 die minimale Unsicherheit zu $U_{f_T} \approx$

16,2%_{MW} = ±8,1% berechnen.

$$f_T = \frac{\alpha}{\beta} \frac{D}{\lambda} \frac{\Delta T}{\Delta \xi_a} \underbrace{\frac{L_{\text{char},\xi}}{L_{\text{char},T}}}_{\cong 1} Re^{n \cong 0} Ro^{m \cong 0} \quad (4.110)$$

$$U_{f_T} = \frac{f_{T,\text{max}} - f_{T,\text{min}}}{1/2 [f_{T,\text{max}} + f_{T,\text{min}}]} \quad (4.111)$$

$$f_{T,\text{max}} = \frac{D [1 + U_D] Re [1 + U_{Re}] Ro [1 + U_{Ro}]}{\lambda [1 - U_\lambda]}$$

$$f_{T,\text{min}} = \frac{D [1 - U_D] Re [1 - U_{Re}] Ro [1 - U_{Ro}]}{\lambda [1 + U_\lambda]}$$

Hierbei werden die Unsicherheiten der Reynolds-Zahl-Skalierung und der Rotationszahl-Skalierung nicht über deren Exponenten angegeben, sondern durch die ermittelte relative Variation U_{Re} und U_{Ro} . Die Exponenten ergäben sich bei expliziten Werten für Re und Ro zu

$$n = 1 + \log_{Re} (1 - U_{Re}) \quad \dots \quad 1 + \log_{Re} (1 + U_{Re})$$

$$m = 1 + \log_{Ro} (1 - U_{Ro}) \quad \dots \quad 1 + \log_{Ro} (1 + U_{Ro})$$

In der Unsicherheit der Transferfunktion ist der relativ große Einfluss des Druckterms auf die innere Energie des Heißgas-Systems im GF II, welcher zur Nichterfüllung der WSA führt, unberücksichtigt. Auch die aus ihm ableitbare Unsicherheit des Wärmeübergangs von ±5% für eine Drehzahlsschwankung von ±0,2% ist nicht mit einbezogen. Ebenso fehlt der Anteil der Unsicherheit durch die Kompressibilität des Fluids sowie der nicht gegebenen Fick'schen Diffusion im Stoff-System. Daher wird die tatsächliche Ungenauigkeit der SAM deutlich größer sein als die Unsicherheit der Transferfunktion von $U_{f_T} \approx \pm 8\%$. Vermutlich wird dadurch auch die Güte von qualitativen Aussagen beeinträchtigt, die mit der SAM ermittelt werden. Dieses muss bei der Interpretation von Ergebnissen bedacht werden.

Anmerkung In der ersten Veröffentlichung [14] zur Nusselt-Zahl¹¹ wird die Problematik der nicht konstanten Materialkoeffizienten bereits verdeutlicht. Die Betrachtung erfolgt allerdings nur für die Temperaturabhängigkeit. Um diese Abhängigkeit näherungsweise zu berücksichtigen, werden als konstante Materialkoeffizienten die integralen Mittelwerte der jeweiligen Materialkoeffizienten DK_m gemäß Gl. 4.112 verwendet.

$$DK_m = \frac{1}{\Delta T} \int_T^{T+\Delta T} DK(T) dT \quad DK : \text{Materialkoeffizient} \quad (4.112)$$

$$\frac{\Delta T}{T_m} = \int_T^{T+\Delta T} \frac{dT}{T} \Rightarrow T_m = \frac{\Delta T}{\ln \left(\frac{T+\Delta T}{T} \right)} \quad (4.113)$$

¹¹In [14] ist die Wärmeübergangszahl mit A gekennzeichnet und trägt noch nicht den Namen Nusselt-Zahl.

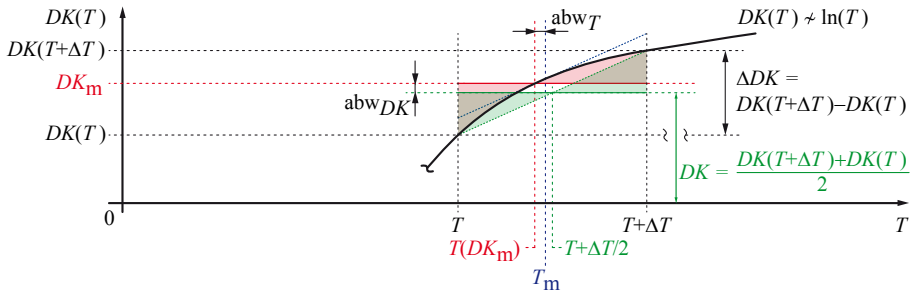


Abbildung 4.16.: Maßstäbliche Skizze zur Bildung des integralen Mittelwerts eines Materialkoeffizienten DK_m , des logarithmischen Mittelwerts der Temperatur T_m sowie der relativen Variation $\Delta DK/DK$ über die Temperaturdifferenz ΔT

Die Temperatur des Systems wird konstant als logarithmischer Mittelwert T_m der auftretenden Temperaturen nach Gl. 4.113 angenommen. In Abb. 4.16 ist beispielhaft die Temperaturabhängigkeit eines Materialkoeffizienten $DK(T)$ sowie dessen Mittelung dargestellt. Durch die integrale Mittelung ergibt sich ein konstanter Materialkoeffizient DK_m . Die zu ihm gehörende Temperatur $T(DK_m)$ entspricht nur der logarithmisch gemittelten Temperatur T_m , wenn der Materialkoeffizient logarithmisch von der Temperatur abhängt und die Temperaturdifferenz im Vergleich zum Temperaturniveau extrem klein ist

$$T(DK_m) \equiv T_m \Leftrightarrow abw_T \rightarrow 0 \quad \forall \quad DK(T) \sim \ln(T) \quad \wedge \quad \Delta T \ll T$$

Trifft beides zu, so ist die Temperaturabhängigkeit des Materialkoeffizienten fast linear im Bereich von T bis $T + \Delta T$. Dann ist auch die Abweichung vom integralen Mittelwert DK_m zum arithmetischen Mittelwert DK vernachlässigbar klein ($abs_{DK} \rightarrow 0$) und die relative Abweichung des Materialkoeffizienten $\Delta DK/DK$ ist ein gutes Maß für die Unsicherheit des Näherungsverfahrens. Allein aus den relativen Variationen der Viskosität $\Delta \eta/\eta$ und der Wärmeleitfähigkeit $\Delta \lambda/\lambda$ im Heißgas-System ergibt sich bereits eine unvermeidbare Unsicherheit von $\pm 6,75\%$. Somit zeigt auch das augenscheinlich genauere Näherungsverfahren aus [14] keine wesentlich geringere Unsicherheit als die Verwendung von beliebigen konstanten Werten der Materialkoeffizienten im Bereich T bis $T + \Delta T$.

Postulat	Gültigkeit	Unsicherheit	Schlussfolgerung
Heißgas- und Stoff-System betreffend			
P. 1 bis P. 9 und P. 22	!	?	
P. 10 Stationäre Massendichte	!	?	Zustandsgrößen müssen stationär sein
P. 11 Kugelförmige Teilchen	!	HS	?
	✓	SS	$\Delta\kappa/\kappa < 0,003\%_{MW}$
P. 12 Inkompressibilität	?	HS	?
	?	SS	?
P. 13 Isoviskos räumlich	✓	HS	?
	✓	SS	$\Delta\eta/\eta \approx 6\%_{MW}$
P. 14 Isowärmeleitfähigkeit räumlich	?	HS	$\Delta\eta/\eta \approx 0,3\%_{MW}$
	✓	SS	?
	?	HS	$\Delta\lambda/\lambda \approx 7,5\%_{MW}$
	✓	SS	$\Delta\lambda/\lambda \approx 0,2\%_{MW}$
Heißgas-System betreffend			
P. 15 Dissipationsfrei	✓	$< 10^{-2}$ Wärmeleitung	
P. 16 Druckterm	✓	GF I	$< 10^{-4}$ Wärmeleitung
	?	GF II	$> 10^3$ Wärmeleitung
Stoff-System betreffend			
P. 17 Gleichgroße Teilchen	?	SS	?
P. 18 Gleichschwere Teilchen	?	?	Für alle Materialkoeffizienten bei $T < 310\text{ K}$ vernachlässigbar
P. 19 Keine Druckdiffusion	✓	$< 10^{-3}$ Diffusion	Fick'sche Diffusion nicht gegeben
P. 20 Isodiffusionskoeffizient	✓	$\Delta D/D \approx 0,7\%_{MW}$	Unsicherheit Diffusion: $U_D > \pm 0,35\%$
P. 21 Keine Thermodiffusion	!	?	
Grenzfall II betreffend			
P. 23 Stationäre Rotation	✓	HS	?
	✓	SS	$\approx \pm 5\%$ Wärmetransport
P. 24 Dominanz Scheinkräfte	✓	HS	$\approx 0,7\%_{MW}$ Stofftransport
	✓	SS	Zulässige Drehzahlschwankung $\pm 0,2\%$
	✓	SS	Zulässige Drehzahlschwankung $\pm 25\%$
	✓	SS	Zulässige Drehzahlschwankung $\pm 0,2\%$
			Strömungsskalierung instationäre Gravitation: $U_{k0} = \pm 2\%$

Tabelle 4.1.: Ergebnisse der theoretischen Betrachtung

4.3. Skalierbarkeit der Bewegungsgleichung

Grundprinzip der SAM ist die Übertragung von Erkenntnissen über den Stofftransport im Stoff-System auf den Wärmetransport im Heißgas-System. Dazu werden die dimensionslosen Gleichungen der SAM verwendet, obwohl diese die realen Eigenschaften des Heißgas- und Stoff-Systems nur ungenau abbilden. Jedoch besteht unabhängig von dieser Ungenauigkeit noch eine weitere Beeinflussung der Aussagequalität, die Skalierbarkeit. Insbesondere aus der Impulserhaltungsgleichung, Gl. 4.74, welche die Bewegung des Fluids beschreibt, werden diesbezüglich generelle Rückschlüsse gezogen.

$$\begin{array}{lll}
 \text{Zentrifugalkraft:} & -\rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) & \equiv -\rho \omega^2 r \quad \text{im GF II} \\
 \text{Coriolis-Kraft:} & -2\rho \vec{\omega} \times \vec{u} & \equiv -\rho 2\omega u \quad \text{im GF II} \\
 \text{Rotationszahl} & Ro \equiv \frac{\omega^2 r}{\omega u} & \text{im GF II} \\
 & Ro \equiv \frac{\omega r}{u} & \text{im GF II, keine Pumpwirkung}
 \end{array}$$

angelehnt an Gl. 4.50, Gl. 4.51, Gl. 4.58 aus Kap. 4.1.5

Zur Anwendung der NSM ist es oft notwendig das Strömungsvolumen des Heißgas-Systems zu skalieren, um den Einsatz der Messtechnik zu ermöglichen. In der Regel erfolgt dieses durch eine rein geometrische Vergrößerung mittels eines konstanten Skalierungsfaktors SF , allerdings nur bezüglich der Koordinaten des Relativsystems x' , y' und z' . Für ein nicht rotierendes System, das heißt das Relativsystem entspricht dem Inertialsystem, mit deutlicher Unterschallströmung ist dieses Vorgehen gerechtfertigt, da die Reynolds-Zahl Re (siehe Gl. 4.35) der einzige ausschlaggebende Koeffizient für die Strömungsform ist. Wird beispielsweise der Durchmesser eines Strömungskanals verzehnfacht, $SF = 10$, so vergrößert sich auch die Geschwindigkeitsgrenschichtdicke um den Faktor 10, sofern die Reynolds-Zahl gleich bleibt. Die Strömungen sind dann ähnlich und die Vergleichbarkeit ist annähernd gegeben. Im rotierenden System ist dieses jedoch nicht der Fall. Hier bewirken die Zentrifugal- und Coriolis-Kraft eine zusätzliche Beeinflussung der Strömung und müssen bei der Skalierung berücksichtigt werden. Beide besitzen jedoch eine Ortsabhängigkeit. Die Zentrifugalkraft ist direkt vom Ort determiniert, da sie den lokalen Radius r , also den Abstand vom jeweiligen Ort zur Rotationsachse beinhaltet. Die Coriolis-Kraft hingegen ist nur indirekt über die lokale Geschwindigkeit u von der Ortskoordinate abhängig. Das Verhältnis beider Scheinkräfte ist die Rotationszahl Ro und neben der Reynolds-Zahl Re ein weiterer, ausschlaggebender Koeffizient für die Strömungsform. Hierin liegt das Problem der konstanten geometrischen Skalierung. Bei dieser wird der lokale Radius r mit dem Faktor SF konstant skaliert, ebenso wie die Abmessungen des Strömungsvolumens. Angenommen sei hier die übliche vergrößernde Skalierung. Somit wird auch die Zentrifugalkraft um diesen Faktor größer und die Coriolis-Kraft muss zur Wahrung der Rotationszahl ebenfalls um denselben Faktor steigen. Dieses kann nur durch die Anpassung der Geschwindigkeit u erfolgen, da die Kreisfrequenz der Rotation ω sowohl in die Zentrifugalkraft als auch in die Coriolis-Kraft eingeht. Durch die Vergrößerung der Strömungsgeschwindigkeit würde jedoch die Reynolds-Zahl unweigerlich um den

Skalierungsfaktor steigen. Grundsätzlich ist es daher nicht möglich, die Ähnlichkeit von Strömungen im rotierenden Relativsystem zu erreichen, wenn eine konstante geometrische Skalierung verwendet wird. Aus dieser Sicht ist die SAM nur für geometrisch unskalierte Systeme korrekt aussagekräftig.

Theoretischer Grenzfall Allerdings existiert der theoretische Grenzfall, dass die Zentrifugalkraft fast keinen Einfluss auf das Geschwindigkeitsfeld hat, sondern sich nahezu vollständig als statischer Druck darstellt. Dieses ist gegeben, wenn die in Kap. 4.2.4 bereits angesprochene Pumpwirkung gegen Null geht und Auftriebseffekte nicht auftreten. Bei isothermen Systemen mit Ein- und Ausströmung auf ähnlichem Radius ist dieses zumindest näherungsweise der Fall. Dann stellt fast nur die Coriolis-Wirkung den Rotationseinfluss auf die Strömung dar. Als Folge lässt sich die Drehkreisfrequenz ω in der Rotationszahl kürzen und existiert dann nur in deren Zähler. Die Rotationszahl kann somit nur durch Anpassung der Kreisfrequenz und nicht durch Änderung der Strömungsgeschwindigkeit u konstant gehalten werden. In diesen Fällen lässt sich dann auch die Reynolds-Zahl gleich halten und trotz konstanter geometrischer Skalierung ist die Ähnlichkeit der Strömungen gegeben. Bei der Herleitung der dimensionslosen Impulserhaltungsgleichungen der SAM wurde durch Gl. 4.68 bereits indirekt angenommen, dass die Zentrifugalwirkung vollständig in ein statisches Druckfeld übergeht, die Pumpwirkung also ausgeschlossen ist. Die Gleichungen gelten daher auch nur für diesen Fall.

$$\begin{aligned}
 \text{x-Richtung: } \left. \frac{D\bar{u}}{DT} \right|_R &= +2Ro_x\bar{v} + Ro_xRo_{x_0} + Ro_x^2\bar{x}' + \frac{1}{Re_x}\Delta\bar{u} - \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{x}} \\
 \text{y-Richtung: } \left. \frac{D\bar{v}}{DT} \right|_R &= -2Ro_x\bar{u} + Ro_xRo_{y_0} + Ro_x^2\bar{y}' + \frac{1}{Re_x}\Delta\bar{v} - \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{y}} \\
 \text{z-Richtung: } \left. \frac{D\bar{w}}{DT} \right|_R &= +\frac{1}{Re_x}\Delta\bar{w} - \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{z}}
 \end{aligned}$$

entspricht Gl. 4.74 aus Kap. 4.1.5

Bemerkung zum theoretischen Grenzfall Im Heißgas-System im Grenzfall II sind temperaturbedingte Auftriebseffekte und Pumpwirkungen nicht a priori vernachlässigbar, wodurch die Skalierung ohne Berücksichtigung der Zentrifugalwirkung zu nicht ausreichend ähnlichen Strömungen führen kann. Die Auftriebseffekte sind in der dimensionslosen Impulserhaltungsgleichung nicht enthalten, da die Massendichte zur Entdimensionierung als konstant angesehen wird. Eine grobe Abschätzung, wie sie in [5] anhand der Archimedes-Zahl und den in [54] zusammengetragenen und visualisierten Untersuchungsergebnissen verschiedener Autoren durchgeführt wird, liefert keine allgemeingültige und schon gar nicht eine quantitative Aussage. Diese ist nur zu erreichen, wenn die Massendichte als Variable angesehen wird und auf geeignete Weise zur Größenordnung von Eins entdimensioniert wird. Die dazu notwendige maximale Dichteänderung ist allgemein unbekannt. Eine quantitative Abschätzung von Auftriebseffekten ist daher nicht möglich. Ferner müssten alle Materialkoeffizienten wie die dynamische Viskosität als Variablen angesehen und geeignet entdimensioniert

werden, da diese durch Temperaturänderungen, welche aus Massendichteänderungen folgen können, beeinflusst werden. Die zu dieser Entdimensionierung verwendeten charakteristischen Änderungen ließen sich ebenfalls nicht allgemein abschätzen. Die Entdimensionierung wäre formal korrekt, aber ohne relevanten Nutzen für die Abschätzung der Unsicherheit der SAM bedingt durch Auftriebseffekte. Die einzige Möglichkeit, die Auftriebseffekte zu quantifizieren, ist die direkte Messung in expliziten Fällen. Ebenso lässt sich die Auswirkung eines etwaigen Pumpeffekts nur durch Untersuchung des expliziten Falls bestimmen. Dimensionslose Gleichungen, deren Druckfeld \bar{p} nur durch Anteile der Zentrifugalwirkung entdimensioniert würde, ließen sich aufstellen, aber ohne Kenntnis der auftretenden Pumpwirkung nicht lösen.

4.4. Kernaussagen der theoretischen Betrachtung

Aus theoretischer Sicht zeigt die SAM einige, möglicherweise sehr große Unsicherheiten, die nicht allgemein quantifiziert werden können. Eine Unsicherheit von etwa $\pm 8\%$ ¹² für den GF I ist allerdings abschätzbar. Im GF II ist die WSA nicht gegeben und die Unsicherheit auch nicht abschätzbar. Zu erwarten ist aber eine größere Unsicherheit als im GF I. Um die Abweichungen zwischen Heißgas- und Stoff-System möglichst klein zu halten, sind die räumlichen und zeitlichen Veränderungen der Materialkoeffizienten und somit auch der Zustandsgrößen in beiden Systemen auf ein maximal erreichbares Minimum zu reduzieren. Weiterhin ist die Reynolds-Zahl erst bei Variationsabständen von $\pm 25\%$ eine zuverlässige Korrelationsgröße. Zur Reproduzierbarkeit des Wärmetransports muss die Drehzahl möglichst konstant sein. Für Systeme, bei denen eine Pumpwirkung auftritt, gelten die angegebenen Gleichungen der SAM nicht. Ferner führt in diesen Fällen eine konstante geometrische Skalierung nicht zu ähnlichen Strömungen.

Fazit Aufgrund der Unsicherheiten sollten die Ergebnisse, die mit dem Stoff-System erbracht werden, nicht direkt auf das Heißgas-System übertragen werden. Auch empirische Korrelationen zum Stoffübergang im GF II werden den Wärmetransport nur mit großer Abweichung beschreiben. Eine Transferfunktion für Wärme- und Stofftransport ist zwingend notwendig, um quantitative Aussagen zwischen Heißgas- und Stoff-System zu übertragen. Ist diese unbekannt, kann eine Untersuchung im Stoff-System nur qualitative Aussagen beziehungsweise Tendenzen zum Wärmetransport und zur Strömungsform im Heißgas-System liefern.

¹²Basierend auf den in dieser Arbeit verwendeten repräsentativen Werten

5. Experimentelle Ergebnisse

Die SAM weist neben der abschätzbaren theoretischen Ungenauigkeiten von mindestens $\pm 8\%$ weitere Unsicherheiten bei der praktischen Umsetzung auf. Vorwiegend betrifft dieses die schlechte Reproduzierbarkeit der NSM. Deren Größe sowie Ursache wird im Folgenden in Kap. 5.1 anhand experimenteller Ergebnisse bestimmt. Weiterhin werden in Kap. 5.2 und Kap. 5.3 aus den Messergebnissen für die Prall- und die Zyklonkühlung Aussagen bezüglich des Einflusses verschiedener Parameter, wie der Rotationszahl, generiert. Die Verwertbarkeit dieser Aussagen dient anschließend in Kap. 6 zur Eignungsbestimmung.

5.1. Reproduzierbarkeit der Naphthalin-Sublimations-Methode

Bereits in [3] findet die schlechte Reproduzierbarkeit der NSM Erwähnung, jedoch ohne nähere Analyse. Deren Ursache wird in der sich zeitlich verändernden Oberflächenkontur und der damit verbundenen Beeinflussung der Geschwindigkeits- und Konzentrationsgrenzschicht vermutet. Die Sherwood-Zahl wäre damit eine Funktion der Messdauer Δt . Infolgedessen werden die Ergebnisse von Messungen mit unterschiedlicher Dauer von $t = 1.800$ s bis $t = 4.200$ s aber bei sonst gleichen Bedingungen linear regressiert und zu einer Dauer von $t = 0$ extrapoliert. Zu Beginn jeder Messung liegt eine spanend bearbeitete, glatte Schicht von $500\text{ }\mu\text{m}$ Dicke vor. Somit dürfte die in [3] angegebene, extrapolierte Sherwood-Zahl jener sehr nahe kommen, die bei glatter, unveränderter Oberflächenkontur vorliegt. Die Messdaten, auf denen diese Regression beruht, werden im Folgenden genauer analysiert. Es wird gezeigt, dass die Oberflächenänderung nicht die einzige Ursache für die schlechte Reproduzierbarkeit der NSM sein kann.

Die gemessenen Rohdaten werden vom Autor von [3], Herrn Nils Winter, zur Verfügung gestellt, wofür ich mich an dieser Stelle besonders bedanke.

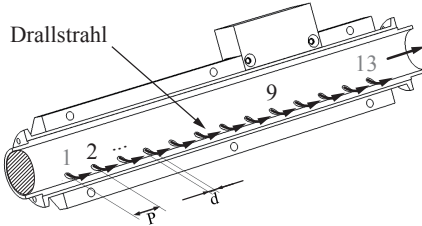
5.1.1. Vermessung nahe eines Dralllochs

In [3] wird der Stoffübergang in 2 Bereichen nahe sogenannter Dralllöcher (2 und 9 siehe Abb. 5.1) untersucht, wobei die Dauer t als einziger Parameter variiert wird. Im Weiteren steht das Symbol Δt für die Messdauer, über der die Ermittlung der Schichtdickendifferenz erfolgt. Das Symbol t wird für die Zeit verwendet, welche die Schicht bereits konvektiv getrieben sublimiert ist. Bei Versuchen, die mit einer neuen Schicht beginnen, entspricht die Messdauer der Messzeit $\Delta t \equiv t$. Die 13 Dralllöcher münden tangential in ein einseitig verschlossenes Kreisrohr als Teil eines Zyklonkanals (siehe Abb. 5.1a). Die Oberflächenkontur in den Vermessungsbereichen schwankt infolge der hohen Geschwindigkeitsgradienten der Drallstrahlen räumlich relativ stark, sodass der vermutete Oberflächeneinfluss zunächst durchaus als plausibel angesehen werden kann. Alle im Folgenden verwendeten Daten sind im Bereich nahe

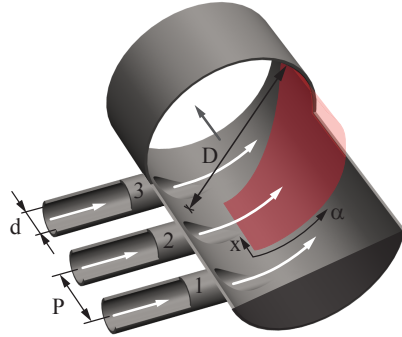
$$d = 1/6 D$$

$$P = 3/4 D$$

$$\text{Länge Dralllöcher} = 2 \dots 3 d$$



(a) Geometrie 2 nach [3]



(b) Vermessungsbereich am Drallloch 2

Abbildung 5.1.: Zyklonkanal für Stoffübergangsmessungen mittels NSM in [3]

dem zweiten Drallloch vermessen worden.

Um den Oberflächen- respektive den Zeiteinfluss auf die Verteilungen der Sherwood-Zahl Sh zu verdeutlichen, sind in Abb. 5.2 selbige, ermittelt aus Messungen mit verschiedener Dauer, als Kontur-Isolinien-Diagramm dargestellt. Bestimmt werden die Sherwood-Zahlen mit der Schichtabnahme über die gesamte Messdauer t nach Gl. 5.1.

$$Sh = \frac{\dot{m}_{\text{sub}} L_{\text{char}}}{[\rho_{a,w} - \rho_{a,\text{ref}}] D} = \frac{\rho_{\text{sub}}}{\rho_{a,w} - \rho_{a,\text{ref}}} \frac{L_{\text{char}}}{D} \frac{\Delta S}{\Delta t} \quad \text{mit } \Delta t = t \quad (5.1)$$

Anhand der unterschiedlichen Verläufe der Isolinien $Sh = 300$ für die jeweilige Messdauer t lässt sich erkennen, dass die Sh -Verteilung nicht unabhängig von dieser ist. Das Gebiet mit einer Sherwood-Zahl $Sh > 300$ ist im Falle der längsten Messdauer $t = 4.200$ s deutlich kleiner als im Falle der kürzesten Messdauer $t = 1.800$ s. Die Ausdehnungen der Gebiete $Sh > 300$ für die anderen Dauern liegen größtenteils dazwischen, wobei kein eindeutiger Zusammenhang zur Messdauer zu erkennen ist. Der in [3] angenommene lineare Zusammenhang von Sh und Messdauer wird nachvollziehbar, wenn die Sherwood-Zahlen beispielhaft für fünf ausgewählte Koordinaten-Punkte über der Messdauer aufgetragen werden, wie in Abb. 5.3 gezeigt. Auch wenn die Einzelwerte merklich von der linearen Regression abweichen, ist ein tendenzieller, näherungsweise linearer Zusammenhang von Sh und Messdauer identifizierbar. Es zeigt sich, zumindest für diese fünf Punkte, dass die Sherwood-Zahl zum Zeitpunkt $t = 0$ s, also bei glatter Oberfläche um bis zu 25% größer ist als zu den späteren Zeitpunkten. Hierbei hat die Messdauer pro Punkt eine unterschiedlich starke Wirkung, wie aus den verschiedenen Steigungen der Regressionsgeraden $d(\Delta S)/dt$ leicht zu entnehmen ist. Diese Beobachtung stärkt die These, dass die Oberflächenkontur einen Einfluss auf die Sherwood-Zahl hat. Allerdings muss dann die Verteilung der Geradensteigungen mit der Oberflächenkontur selbst korrelieren. Falls die Oberflächenkontur keinen Einfluss auf die Sherwood-Zahl hat, ist die Steigung der Geraden

überall Null. Da die Anfangsoberfläche nach mechanischer Bearbeitung stets glatt¹ ist, entsprechen die Oberflächenkonturen S der Schichtdickenabnahmen ΔS . Letztere sind in Abb. 5.4 als Kontur-Isolinien-Diagramm visualisiert und entsprechen der jeweiligen Sh -Verteilung, da alle Einflussgrößen wie die Temperatur und der Druck in der jeweiligen Messung zu Konstanten gemittelt² werden. Der Vergleich zum Kontur-Diagramm der Geradensteigung in Abb. 5.5 zeigt jedoch keine Ähnlichkeit. Die Zeitabhängigkeit der Sherwood-Zahl kann daher nur mit der zeitlichen Änderung der Oberflächenkontur in Zusammenhang stehen, wenn diese Abhängigkeit stark nichtlinear ist. In Bezug auf die komplizierte Strömungsform eines Drallstrahls ist dieses möglich, aber unwahrscheinlich.

Weiterhin ist ein relevanter systematischer Messfehler als Ursache für die Zeitabhängigkeit auszuschließen, da die lineare Regression der Schichtdickendifferenzen dS eine Schichtdickendifferenz von $\Delta S \in [-5; +20] \mu\text{m} \approx 0$ für den Anfangszeitpunkt vorhersagt (siehe Abb. 5.7). Die Extrapolation der Schichtdickendifferenzen führt also nahezu auf die glatte Anfangsoberfläche. Anzumerken ist hierbei, dass die Zeitabhängigkeit der Schichtdickendifferenz eigentlich von quadratischer Natur sein müsste, damit die Sherwood-Zahl zur Messdauer linear ist, wie zuvor angenommen. Diese quadratische Abhängigkeit ist jedoch von sehr geringer Ausprägung, wie aus Abb. 5.6 zumindest für die fünf ausgewählten Punkte zu erkennen ist.

Ferner stellen Variationen der Zustandsgrößen, die durch die Mittelung nicht bemerkt werden, ebenfalls keine Ursache für die Zeitabhängigkeit dar. Relevant wäre hier vor allem die Temperatur. Diese Schwankung müsste entgegen aller Erwartungen lokal extrem unterschiedlich und reproduzierbar sein. Vorstellbar ist daher nur eine Begründung für die Zeitabhängigkeit. Die Schichtdickenabnahmegeschwindigkeit $\Delta S/t$, beziehungsweise die aus ihr ermittelte Sherwood-Zahl Sh , hängt von der Schichtdicke S selbst ab. Oder verallgemeinert ausgedrückt ist die Schichtdickenabnahmegeschwindigkeit nicht proportional zur Sublimationsmassenstromflächendichte \dot{m}_{sub} . Dieses ist nur dann möglich, wenn die Massendichte der Naphthalin-Schicht ρ_{sub} und/oder das Sublimationsverhalten inhomogen in der Schicht verteilt ist. Die Ursache für die in [3] beobachtete Zeitabhängigkeit ist daher im kristallographischen Aufbau der Naphthalin-Schicht und dessen zeitlicher Änderung zu finden.

¹Die gemittelte Rautiefe liegt bei maximal $10 \mu\text{m}$

²Es liegen 32 Temperatur- und Druckmesspunkte vor, die mehrmals pro Minute aufgezeichnet werden

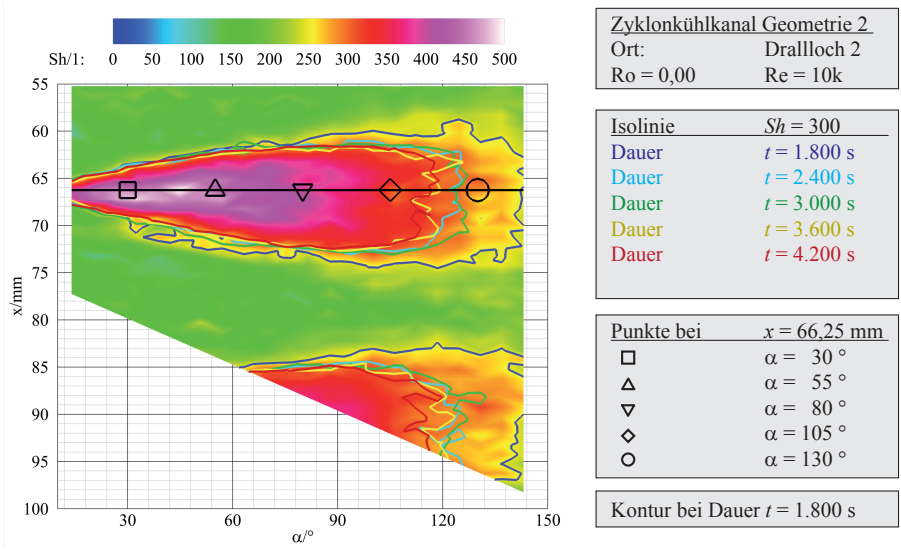


Abbildung 5.2.: Gemessene Verteilung von Sh bestimmt bei einer Messdauer von $t = 1.800$ s und Isolinien von $Sh = 300$ bestimmt bei vier weiteren Dauern

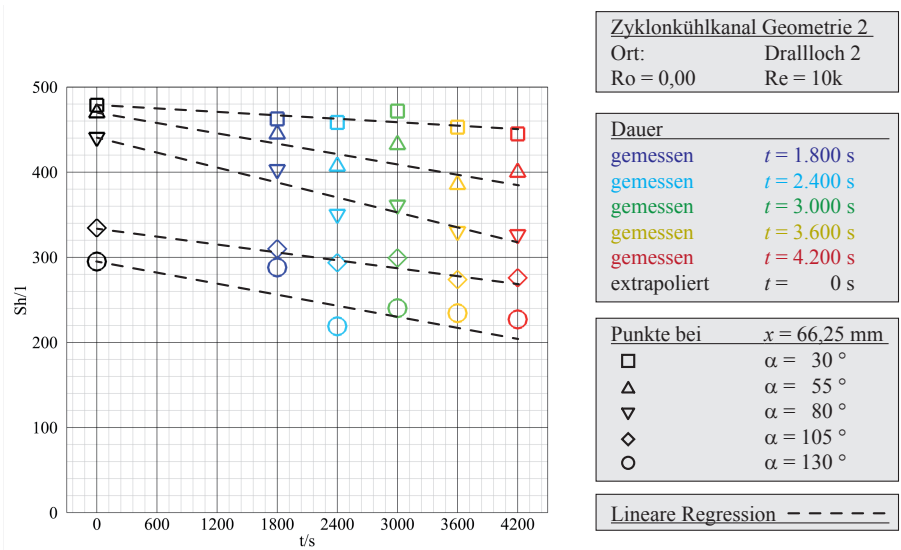


Abbildung 5.3.: Verlauf von Sh mit der Messdauer an ausgewählten Punkten

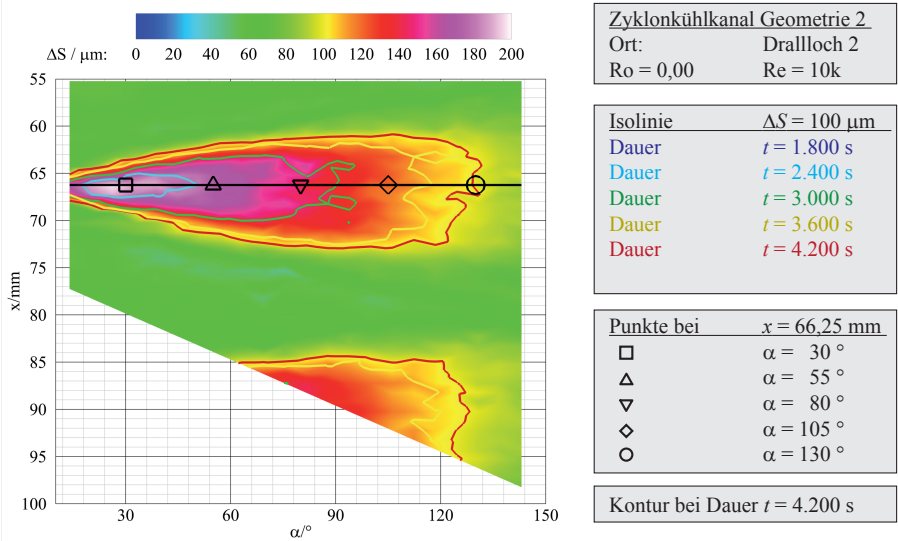


Abbildung 5.4.: Gemessene Verteilung von ΔS bestimmt bei einer Messdauer von $t = 1.800 \text{ s}$ und Isolinien von $\Delta S = 100 \mu\text{m}$ bestimmt bei vier weiteren Dauern

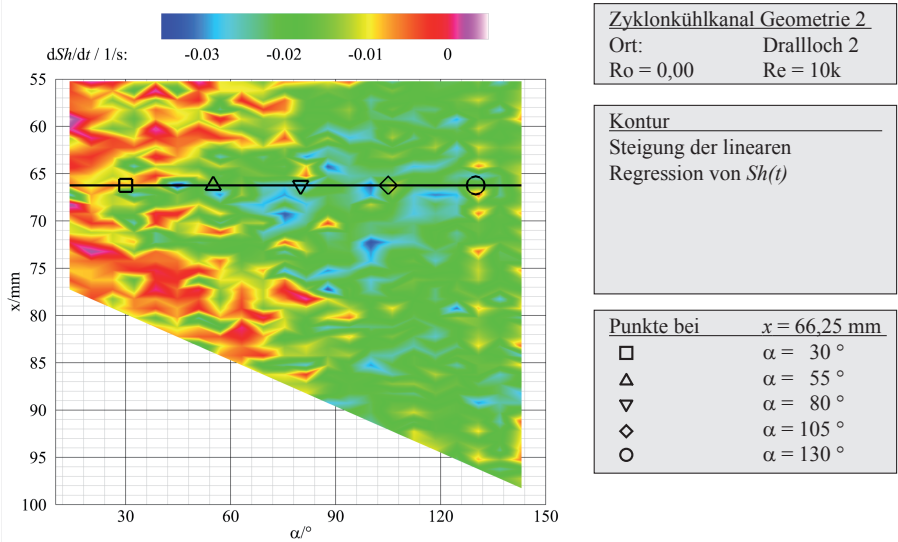


Abbildung 5.5.: Steigung der linearen Regression von $Sh(t)$ basierend auf fünf Messdauern

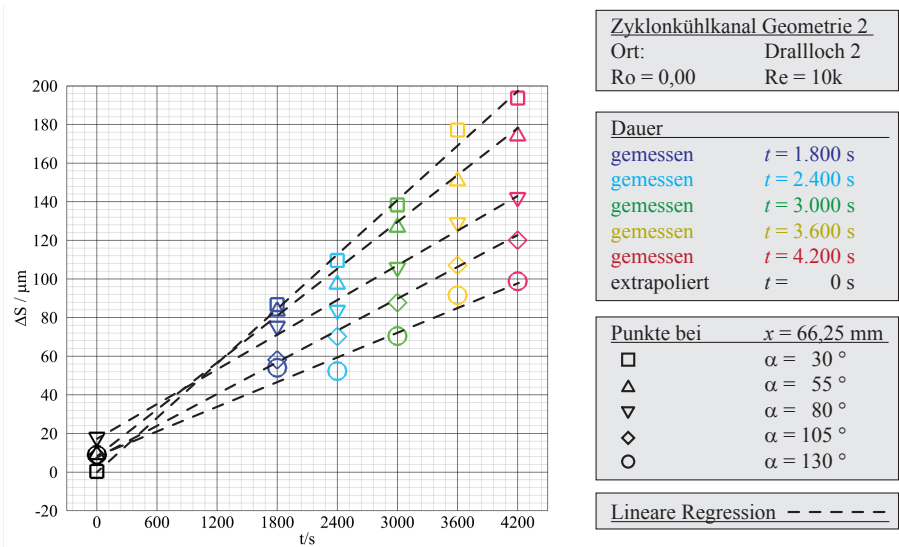


Abbildung 5.6.: Verlauf von ΔS mit der Messdauer an ausgewählten Punkten

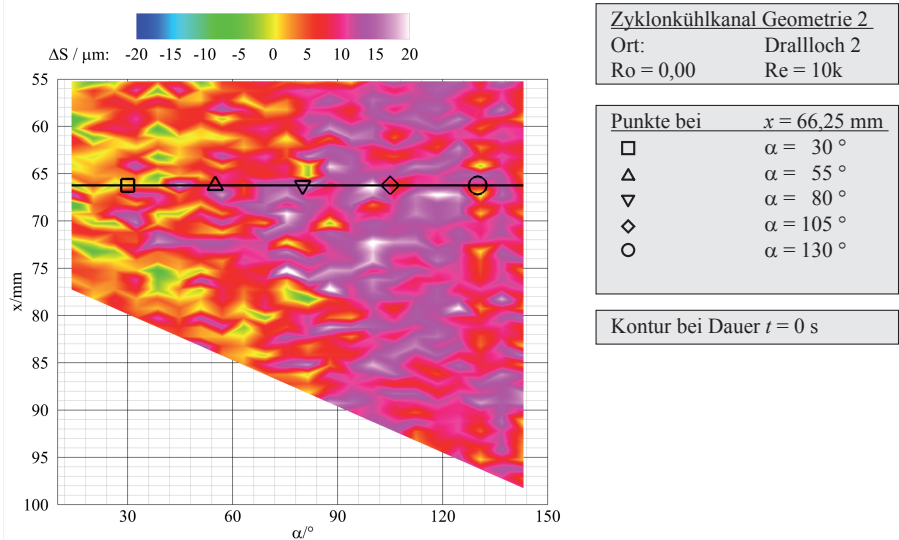


Abbildung 5.7.: Linear extrapolierte Schichtdickendifferenz $\Delta S(t = 0)$ zum Anfangszeitpunkt basierend auf fünf Messdauern

5.1.2. Sublimationsverhalten von Naphthalin-Schichten

Die hier eigentlich interessierende Größe zum Sublimationsverhalten von Naphthalin-Schichten ist das Verhältnis $\Delta S / (t \cdot \dot{m}_{\text{sub}})$. Um dieses experimentell zu bestimmen, müsste sowohl die Schichtdickenänderung und die Massenänderung mit annähernd gleicher Genauigkeit vermessen werden. Eine praktikable Bestimmung der sublimierten Massen ist jedoch nur gravimetrisch möglich und liefert lediglich einen räumlich integralen Wert der Massenänderung. Der Messfehler ist folglich sehr groß im Vergleich zu jenem bei der Vermessung der Schichtdickenabnahme. Daher wird in dieser Untersuchung auf die Massenbestimmung verzichtet und die eigentliche Messgröße der NSM, die Schichtdickenänderung betrachtet.

Ergebnisgewinnung Die nachfolgenden Ergebnisse entstammen aus Doppelproben-Sublimations-Experimenten (siehe Kap. 3.1.1) unter Verwendung der optischen Oberflächenvermessung (siehe Kap. 3.1.5) sowie der optischen Auflichtmikroskopie (siehe Kap. 3.1.3). Alle untersuchten Naphthalin-Schicht-Proben sind wie in Kap. 3.1.2 beschrieben hergestellt und auf einem der drei Typen von Probenhaltern appliziert. Die Verwendung von verschiedenen großen, kreisförmigen Beschichtungsflächen mit den Durchmessern $d = 4 \text{ mm}$, $d = 8 \text{ mm}$ und $d = 16 \text{ mm}$ ermöglicht es, den etwaigen Einfluss einer seitlichen Kante der Schicht auf den Stofftransport nahe eines Stau-punktes zu identifizieren. Weiterhin ist die Form der jeweiligen Naphthalin-Schicht zwischen den Probenhaltertypen unterschiedlich. Während die Proben auf der großen Beschichtungsfläche ($d = 16 \text{ mm}$) relativ eben sind, gleichen sie einem benetzenden Tropfen mit einem Kontaktwinkel von etwa 10° bei der Beschichtungsfläche mit einem Durchmesser von $d = 8 \text{ mm}$. Bei der kleinsten Beschichtungsfläche ($d = 4 \text{ mm}$) liegt der Kontaktwinkel bei zirka 45° . Die Proben einer Paarung werden im Weiteren mit denselben Buchstaben A...M gekennzeichnet. Da die Proben als Paarung mehrfach Verwendung finden, sind auch die so entstandenen Messserien mit A...M benannt. Mit wenigen Ausnahmen (Messserien L, und Teile von F, I, M) werden alle Proben vor der ersten Messung einer Serie durch Fräsen oder manuelles Schleifen geglättet und auf eine gewünschte Schichtdicke gebracht. Die Sublimationsversuche erfolgen bei einer Reynolds-Zahl³ $Re = 85k$ und $Re = 400k$ über eine Dauer von $\Delta t = 600 \text{ s}$ und teilweise von $\Delta t = 1.200 \text{ s}$. Vor dem ersten und nach dem letzten Versuch einer Messserie sowie zwischen den Versuchen werden die Oberflächen der Proben mit mikroskopischen Aufnahmen dokumentiert und einmalig vermessen. Damit entspricht die POST-Messung der PRE-Messung eines nachfolgenden Versuchs. Bei den Serien A, B ... I werden drei um $30 \mu\text{m}$ in Pulsationsrichtung x (siehe Abb. 3.5a) versetzte Einzelgitter mit der Weite $dx = 90 \mu\text{m}$ und $dy = 30 \mu\text{m}$ vermessen und in der Nachbearbeitung zu einem Datensatz zusammengefügt. Die Gitterweite dieses Datenfeldes entspricht dann mit $dx = dy = 30 \mu\text{m}$ etwa dem halben Durchmesser des physikalischen Mittelungsbereichs des Sensors, wodurch die räumliche Auflösung vollständig ist. In den Serien K, L, M wird ein isodistantes Gitter mit einer Weite von $dx = dy = 90 \mu\text{m}$ direkt vermessen. Um die Vergleichbarkeit zu der in [3] verwendeten Schichtdickenmessmethode mittels Wirbelstromsonde zu erhalten, werden die

³Die charakteristische Länge von Re ist der hydraulische Durchmesser des Windkanals $d_h \hat{=} 240 \text{ mm}$

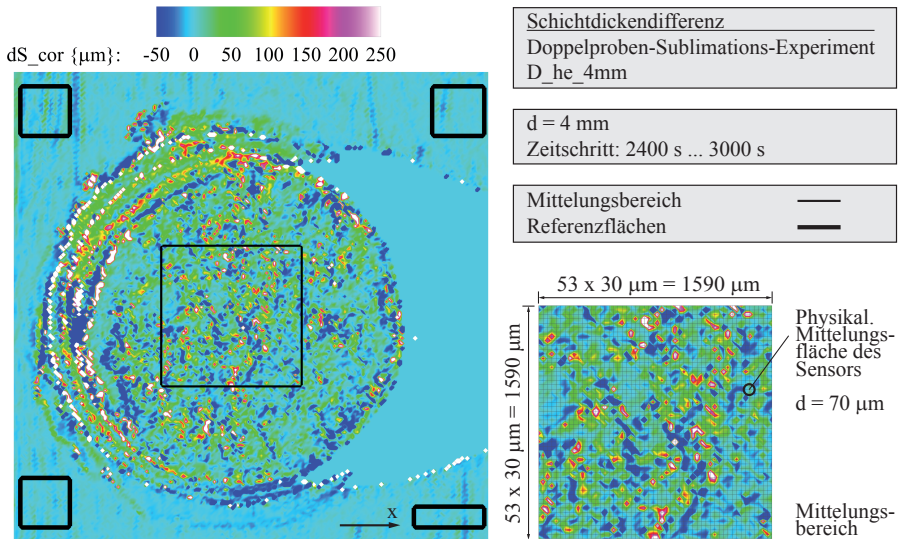


Abbildung 5.8: Exemplarische Verteilung der Schichtdickendifferenz einer Probe auf der Beschichtungsfläche, im Mittelungsbereich und auf den Referenzflächen

hier ermittelten Schichtdicken- und -abnahmewerte in einem quadratischen Bereich der jeweiligen Probe gemittelt. Die Diagonale dieses Bereichs entspricht etwa dem Durchmesser der Kreisfläche, in der die Schichtdicke von der Wirbelstromsonde physikalisch gemittelt wird. Der errechnete Mittelwert wird daher nahe an dem Messwert der Wirbelstromsonde liegen. Um ein unbeabsichtigtes Einbeziehen der blanken Bereiche am Rand der Beschichtungsfläche zu vermeiden, welche durch den dort höheren Stofftransport am ehesten entstehen, ist der Mittelungsbereich in der Mitte der Proben positioniert. In der Messserie A ... I hat der Mittelungsbereich die Abmessungen $1.590 \mu\text{m} \times 1.590 \mu\text{m}$ und beinhaltet 2.809 Messpunkte. Ein solches Messgitter mit einer exemplarischen Verteilung der Schichtdickendifferenz sowie gekennzeichneten Mittelungsbereich und Referenzflächen ist in Abb. 5.8 dargestellt. In den restlichen Messserien umfasst der Mittelungsbereich 961 Messpunkte und erstreckt sich über $2.790 \mu\text{m} \times 2.790 \mu\text{m}$.

Um sicherzustellen, dass nicht Störeffekte wie Temperaturschwankungen die Ursache vom beobachteten Schichtverhalten sind, dürfen nur die Proben einer Paarung und einer Messung miteinander verglichen werden. Allerdings ist eine qualitative Gegenüberstellung der Ergebnisse beliebiger Messungen auch von Proben unterschiedlicher Messserien sicherlich zulässig.

Variationsparameter Das Sublimationsverhalten der Naphthalin-Schicht wird bei verschiedenen Konstellationen von vier naheliegenden Parametern untersucht. Ein Parameter ist die Art der Vorbehandlung der Naphthalin-Schmelze. Ist diese unbehan-

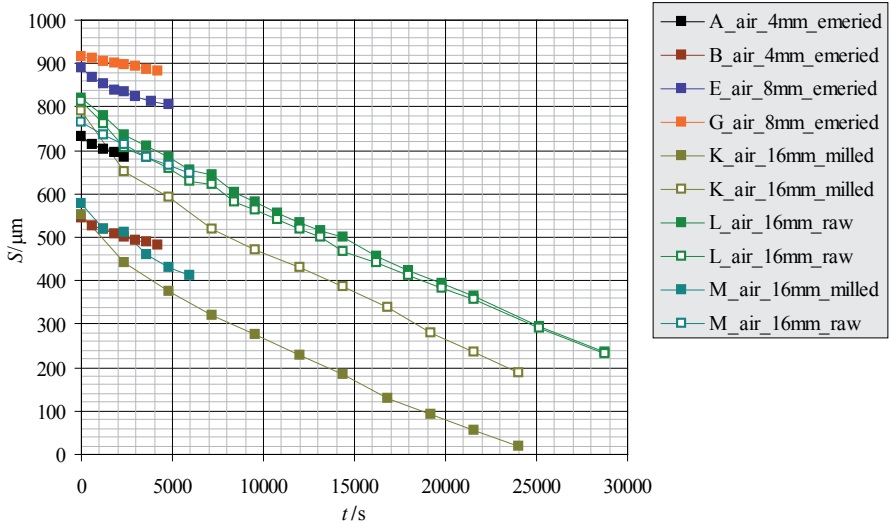


Abbildung 5.9.: Schichtdickenänderung der Proben aus unbehandelter Naphthalin-Schmelze bei $Re = 85k$ (A, B, E, G) und $Re = 400k$ (K, L, M)

delt, sind die Ergebnisse mit *air* gekennzeichnet. Im Falle von entgaster Schmelze wird die Kennzeichnung *he* verwendet. Ein weiterer Parameter ist der Durchmesser der Beschichtungsfläche welcher direkt als *4mm*, *8mm* oder *16mm* bei den Ergebnissen mit angegeben wird. Die Art der Vorbehandlung der Naphthalin-Schicht ist der dritte Parameter, wobei eine unbearbeitete Schicht mit *raw*, eine manuell geschliffene Schicht mit *emeried* und eine gefräste Schicht mit *milled* gekennzeichnet wird. Der letzte Parameter ist die Reynolds-Zahl Re . Sie ist bei den Ergebnissen direkt als Wert angegeben.

Makroskopisches Verhalten

Das makroskopisch festzustellende Verhalten der Naphthalin-Schicht wird anhand der gemittelten Schichtdicken- und -abnahmewerte quantifiziert. Alle hierzu verwendeten Diagramme (Abb. 5.9, Abb. 5.10, Abb. 5.12, Abb. 5.13) sind nicht dafür gedacht, jeden Parametereinfluss explizit zu visualisieren. Vielmehr sollen sie einen Überblick über das generelle Verhalten der Naphthalin-Schicht geben, allerdings mit der strikten Trennung nach unbehandelter und entgaster Schmelze. Es sei hier bereits vorweggenommen, dass keine eindeutigen Zusammenhänge zwischen den beobachteten Phänomenen und den Parametern gefunden werden. Allerdings liefert die Beschreibung und Diskussion jedes Effekts einen Eindruck, welcher Parameter das Verhalten der Naphthalin-Schicht beeinflusst.

Einfluss der Reynolds-Zahl Generell entspricht der Trend bezüglich der Reynolds-Zahl den Erwartungen. Die Schichtdicke S nimmt, wie in Abb. 5.9 zu entnehmen ist,

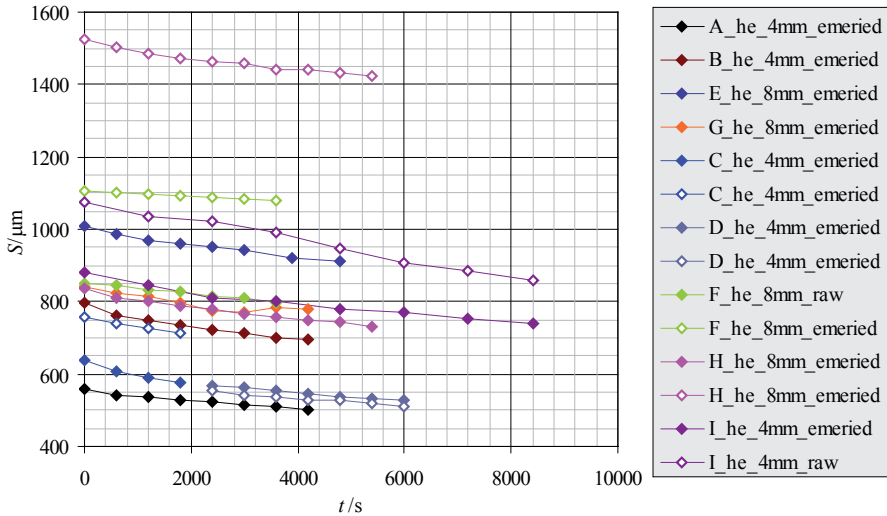


Abbildung 5.10.: Schichtdickenänderung der Proben aus entgaster Naphthalin-Schmelze bei $Re = 85k$

bei größerer Reynolds-Zahl schneller ab als bei kleinerer. Wenn alle Werte für den jeweiligen Parameter Re gemittelt werden, ergibt sich nach Gl. 5.3 ein Exponent für die häufig verwendete Korrelation Gl. 5.2 von $n \approx 0,26$. Auch wenn dieses Ergebnis nur auf zwei Werten von Re beruht, ist die Größe des Exponenten plausibel. Übliche Werte für n in ähnlichen Fällen, wie bei der Umströmung von Kugeln (siehe [55]) oder im Staupunkt von Prallstrahlen (siehe [56]), liegen im Bereich von $n \in [0,5; 0,8]$. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass die Reynolds-Zahl entsprechend der jeweiligen charakteristischen Länge umgerechnet werden muss zu $Re = 85k \Leftrightarrow Re = 7.083$ und $Re = 400k \Leftrightarrow Re = 33.333$.

$$Sh \sim Re^n \quad (5.2)$$

$$\Rightarrow n \hat{=} \log_{\frac{Re_1}{Re_2}} \left(\frac{\frac{\Delta S}{t}}{\frac{\Delta S}{t}} \right) \quad \forall \quad Sh \sim \frac{\Delta S}{t} \quad (5.3)$$

Allerdings relativieren die Standardabweichungen $\sigma_{Re=85k}(\Delta S/t) \approx 50\%$ und $\sigma_{Re=400k}(\Delta S/t) \approx 45\%$ den Wert des Exponenten, sodass dieser im Bereich $n \in [-0,38; 0,95]$ zu erwarten ist. Folglich ist die Korrelation von geringer Qualität, was sich auch nicht durch Berücksichtigung von mehr Messpunkten beheben lassen wird. Verantwortlich hierfür ist die erhebliche Schwankung der Schichtdickenabnahmegeschwindigkeit, insbesondere zu Beginn einiger Messserien. Viele Linien in Abb. 5.9 beginnen mit hohen Schichtabnahmegeschwindigkeiten und konvergieren nach längerer Messzeit gegen kleinere Werte. Annähernd konstant sind diese erst nach

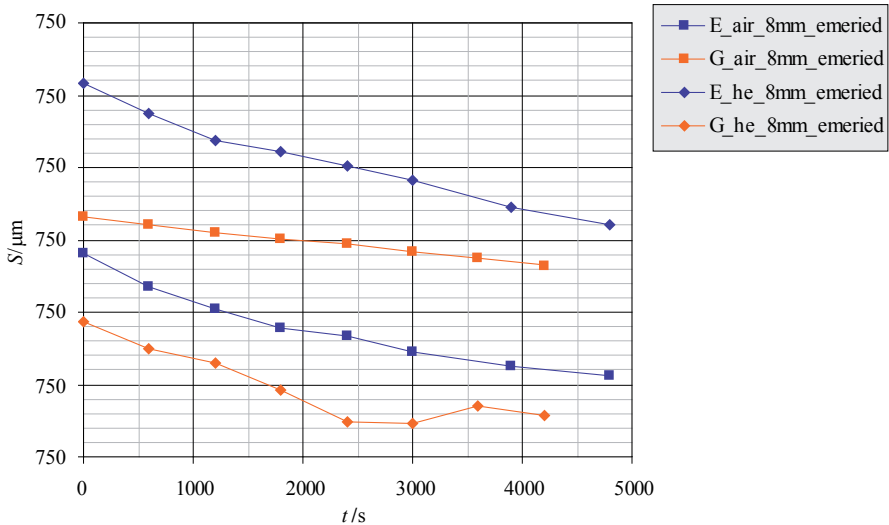


Abbildung 5.11.: Unterschiedliches und gleiches Anfangsverhalten der Proben bei $Re = 85k$

einem aerodynamisch bedingten Schichtabtrag von $\Delta S \approx 200 \mu m$. Dieses Anfangsverhalten scheint bei größerer Reynolds-Zahl ausgeprägter zu sein (Messserien K, L und M). Bei $Re = 85k$ und un behandelter Naphthalin-Schmelze ist der zur Konstanz notwendige Schichtabtrag mit $\Delta S \approx 50 \mu m$ deutlich kleiner. Die Messserie E bildet diesbezüglich eine Ausnahme.

Eine mögliche Ursache für das Anfangsverhalten ist die Temperatur, die sich während einer Messserie verändern kann. Um dauerhaft eine möglichst geringe Konzentration an Naphthalin in der Zuluft zu gewährleisten, befindet sich der Auslass des Windkanals außerhalb des Gebäudes. Die Eintrittsluft wird direkt aus der relativ großen Laborhalle (zirka $1.000 m^3$) entnommen, deren Ventilation mit Außenluft durch die Windkanalabsaugung getrieben wird. Durch die Belüftung mit meist kälterer Außenluft sinkt die Temperatur der Eintrittsluft des Windkanals von Messungen zu Messung. Der Sublimations- und der Diffusionsstrom werden daher von Messung zu Messung geringer sein. Sie konvergieren aber gegen nahezu konstante Werte, sobald die Eintrittstemperatur zeitlich nicht mehr schwankt. Kein ausgeprägtes Anfangsverhalten wäre feststellbar, wenn die Eintrittstemperatur zu Beginn der Serie bereits der Außentemperatur entspräche. Gegen diese generelle Vermutung spricht jedoch der Vergleich zweier repräsentativer Proben einer Messserie wie in Abb. 5.11 dargestellt. Obwohl die Proben der Serie G denselben Temperaturbedingungen ausgesetzt sind, zeigt nur eine Probe (G_he_8mm_emeried) ein ausgeprägtes Anfangsverhalten wie die beiden Proben der Serie E.

Einfluss der Entgasung Das Anfangsverhalten wird, wie aus Abb. 5.10 und Abb. 5.11 zu entnehmen ist, nicht merklich durch die Entgasung der Naphthalin-Schmelze beeinflusst. Dieses gilt sowohl für unbearbeitete Proben als auch für jene, deren Oberfläche spanend geglättet sind. Einige wenige Proben zeigen vom Beginn der Messserie an ein lineares Zeitverhalten. Bei den meisten Proben allerdings wird eine konstante Schichtdickenabnahmegeschwindigkeit erst nach einer Schichtabnahme von $\Delta S \approx 50 \mu\text{m}$ erreicht. Es ist daher kein Unterschied zum Verhalten von Proben aus unbehandelter Schmelze zu erkennen.

Einfluss der Oberflächenbearbeitung Obwohl die spanende Bearbeitung die Dicke der Naphthalin-Schicht um einen ähnlichen Betrag reduziert wie das Anfangsverhalten benötigt, um abzuklingen, verhalten sich die bearbeiteten und unbearbeiteten Proben sehr ähnlich (vergleiche entsprechende Messserien in Abb. 5.10 und Abb. 5.9). Das Anfangsverhalten kann anscheinend nicht durch mechanisches Abtragen der obersten Schichtanteile beseitigt werden. Diese Beobachtung spricht gegen die These, dass die schlechte Reproduzierbarkeit der NSM durch einen inhomogenen kristallographischen Aufbau der Naphthalin-Schicht verursacht wird.

Einfluss der Probenform Die stark unterschiedliche Form der Proben, bedingt durch die verschiedenen Durchmesser der Beschichtungsflächen, Schichtdicken und Kontaktwinkel, und die damit verbundenen unterschiedlichen Geschwindigkeits- und Konzentrationsgrenzschichten beeinflussen die Schichtdickenabnahmegeschwindigkeit nicht messbar. Dieses ist der Fall, obwohl die Anfangsschichtdicken um 300% beziehungsweise 12%_d bezogen auf den Beschichtungsflächendurchmesser variieren. Das Zeitverhalten der Naphthalin-Schicht beim Doppelproben-Sublimations-Experiment kann damit keine Folge aus sich verändernden Oberflächenkonturen sein.

Reproduzierbarkeit An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, dass die Abweichung jedes Punktes in Abb. 5.10 und Abb. 5.9 von einer gedachten Regressionsgeraden ihre Ursache in veränderten Zustandsgrößen, wie der Temperatur hat. Daher ist sie kein aussagekräftiges Maß für die Reproduzierbarkeit. Nur der Vergleich der Proben eines Paares und derselben Messung liefert quantitativ verlässliche Ergebnisse. Daher wird gemäß Gl. 5.4 die Differenz der Schichtdickenabnahmegeschwindigkeiten der Proben einer Messung bezogen auf den Mittelwert aus beiden Schichtdickenabnahmegeschwindigkeiten. Die so definierte Größe wird nachfolgend als relative Abweichung $|\Delta S_{rel}|$ bezeichnet. Sie ist ein geeignetes Maß für die Reproduzierbarkeit der NSM, da die Schichtdickenabnahmegeschwindigkeit direkt in die Sherwood-Zahl eingeht.

$$|\Delta S_{rel}| = \frac{2 \left| \frac{\Delta S_1}{\Delta t_1} - \frac{\Delta S_2}{\Delta t_2} \right|}{\frac{\Delta S_1}{\Delta t_1} + \frac{\Delta S_2}{\Delta t_2}} \equiv \frac{2 |\Delta S_1 - \Delta S_2|}{\Delta S_1 + \Delta S_2} \quad \forall \quad \Delta t_1 = \Delta t_2 \quad (5.4)$$

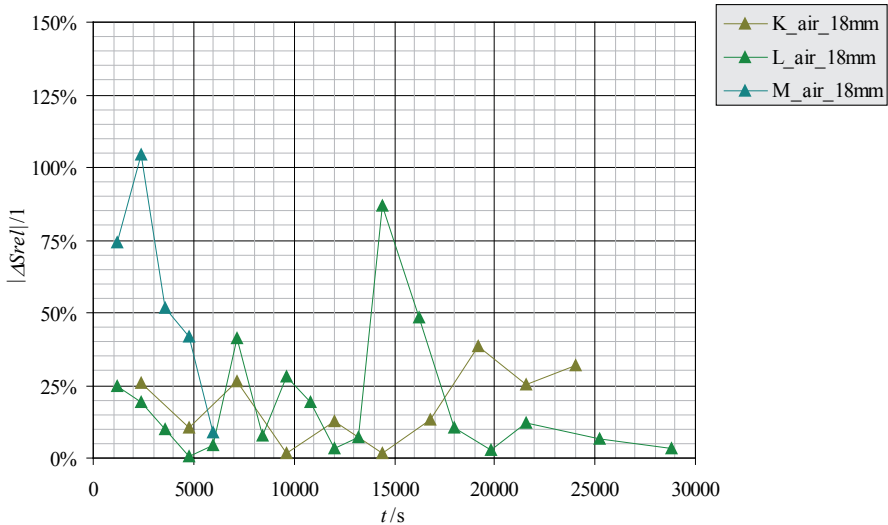


Abbildung 5.12.: Relative Schichtdickenänderung der Proben aus unbehandelter Naphthalin-Schmelze

Die relativen Abweichungen $|\Delta S_{rel}|$ für Proben aus unbehandelter Schmelze zeigen eine große willkürliche Streuung unter den Messungen wie Abb. 5.12 zu entnehmen ist. Teilweise wird ein Wert von 105%⁴ erreicht. In diesem Fall ist die Schichtdickenabnahmegeschwindigkeit einer Probe etwa dreimal größer als die der anderen Probe. Würden mit diesen Naphthalin-Schichten Wiederholungsmessungen bei der Anwendung der NSM durchgeführt, wären auch die Sherwood-Zahlen um den Faktor drei voneinander verschieden, obwohl alle Bedingungen gleich gehalten würden. Für eine statistische Aussage zur relativen Abweichung reicht der Umfang der Daten nicht aus. Es ist jedoch zu vermuten, dass am häufigsten Werte im Bereich von $|\Delta S_{rel}| \in [0; 40] \%$ auftreten, was bei Wiederholungsmessungen einem Verhältnis der Schichtdickenabnahmegeschwindigkeiten und damit auch der Sherwood-Zahlen von etwa 1,5 entspricht. Bei den Proben aus entgaster Schmelze ist die Streuung der relativen Abweichung noch ausgeprägter als bei den Proben aus unbehandelter Schmelze. In Abb. 5.13 ist zu erkennen, dass die relative Abweichung vermehrt Werte im Bereich von $|\Delta S_{rel}| \in [25; 125] \%$ annimmt. Bei Wiederholungsmessungen ist daher durchaus mit einem Verhältnis der Schichtdickenabnahmegeschwindigkeiten und damit auch der Sherwood-Zahlen von etwa 5 zu rechnen.

Fazit Die in [3] beobachtete schlechte Reproduzierbarkeit der NSM, welche als relative Abweichung angenommen etwa $|\Delta S_{rel}| \approx 12\%$ ergibt, bestätigt sich durch die

⁴Da es sich bei $|\Delta S_{rel}|$ um eine relative Abweichung handelt, wird auf die Angabe des Bezugs MW am Prozentzeichen verzichtet.

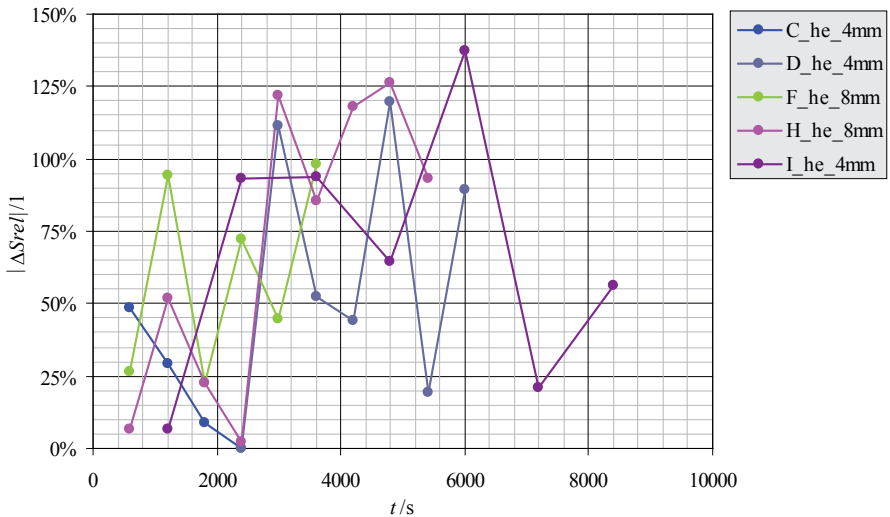


Abbildung 5.13.: Relative Schichtdickenänderung der Proben aus entgaster Naphthalin-Schmelze

Ergebnisse der Doppelproben-Sublimations-Experimente. Allerdings sind die in dieser Arbeit festgestellten relativen Abweichungen mit bis zu $|\Delta S_{rel}| = 138\%$ deutlich größer. Eine Entgasung der Naphthalin-Schmelze führt zu keiner verbesserten Reproduzierbarkeit, eher zu einer schlechteren. Die mechanische Bearbeitung der Naphthalin-Schicht hat keinen erkennbaren Einfluss auf das Schichtabtragsverhalten und beseitigt auch nicht die anfänglich hohe Schichtabnahmegeschwindigkeit. Die Reproduzierbarkeit ist mit relativen Abweichungen von bis zu $|\Delta S_{rel}| = 138\%$ unzureichend, sodass verlässliche, quantitative Aussagen von der NSM nicht zu erwarten sind.

Mikroskopisches Verhalten

Im Folgenden wird das Verhalten der Naphthalin-Schichten detaillierter betrachtet, wobei die Kombination der Oberflächenmessungen mit mikroskopischen Schliffbildern Aufschluss über die Ursache der schlechten Reproduzierbarkeit gibt. Bei der NSM liegt üblicherweise eine Sublimatschicht vor, die aus einem Korngefüge besteht, dessen Struktur größtenteils durch den Kristallisationsprozess bestimmt ist. Folglich charakterisieren kristallographische Eigenschaften, wie beispielsweise die Korngröße die Naphthalin-Schicht und möglicherweise auch das Sublimationsverhalten.

Beobachtungen In allen hier verwendeten Proben besteht das Korngefüge der Naphthalin-Schicht aus mannigfaltig geformten Kristallen, die jedoch im zweidimensionalen Schliffbild stets ein Polygon bilden. Beispielhaft aber repräsentativ zeigt Abb. 5.14 die Korngefüge von Proben aus unbehandelter und entgaster Schmelze

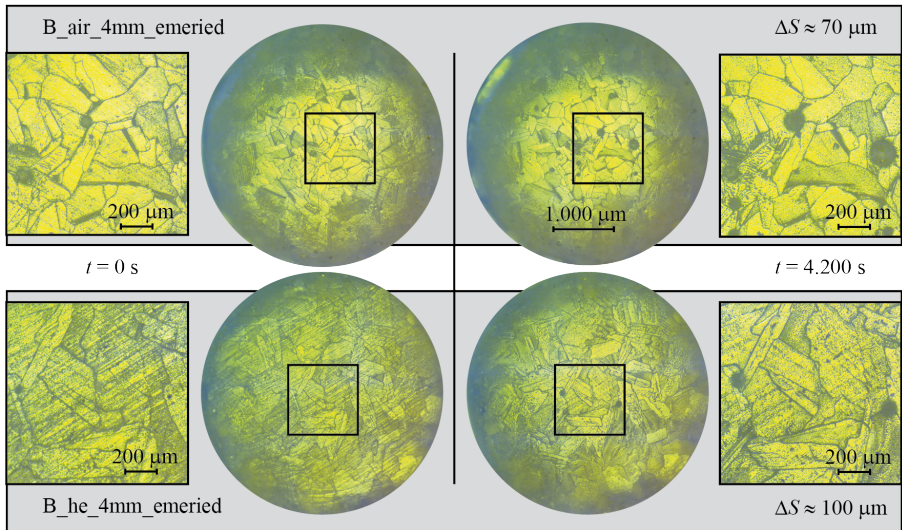


Abbildung 5.14.: Mikroskopische Schliffbilder von je einer geschliffenen Probe aus unbehandelter und entgaster Schmelze am Anfang und Ende einer Messserie

sowohl vor als auch nach einer Messserie. Das manuelle Schleifen beider Proben vor Messserienbeginn hinterlässt gleichmäßige Kratzer, wobei diese bei der im oberen Bildteil gezeigten Probenschicht aufgrund bewusst geringeren Schleifdrucks nicht so ausgeprägte Tiefen besitzen. Reste dieser Kratzer sind auch nach einer Sublimationszeit von $t = 4.200 \text{ s}$ beziehungsweise nach einer Schichtabtragung von $\Delta S \approx 70 \text{ }\mu\text{m}$ respektive $\Delta S \approx 100 \text{ }\mu\text{m}$ noch auf den Oberflächen vorhanden. Die Folgen der mechanischen Bearbeitung sind daher deutlich länger auf der Schichtoberfläche nachweisbar als die meisten Messserien lang sind. Es ist daher nicht zu erwarten, dass sie Ursache für die schlechte Reproduzierbarkeit oder gar das Anfangsverhalten sind. Die vier eingezeichneten Vergrößerungsbereiche entsprechen etwa der Größe des Mittelungsbereichs der Oberflächenmessung und damit auch der in [3] verwendeten Wirbelstromsonde. Die kleinsten Diagonalen der Körner liegen im Bereich von $5...400 \text{ }\mu\text{m}$, wobei die größten Diagonalen selten $1.000 \text{ }\mu\text{m}$ erreichen. Anders als bei der optischen Oberflächenvermessung ist es bei der Verwendung einer Wirbelstromsonde daher unwahrscheinlich, nur ein oberflächliches Korn zu vermessen. Die Ursache der schlechten Reproduzierbarkeit dürfte also im Gefügebau und nicht im Verhalten eines einzelnen Kornes liegen.

Auffällig an der Gefügestruktur aller Proben sind kreisförmige, anscheinend nicht mit festem Naphthalin gefüllte Objekte, welche im Weiteren als Poren bezeichnet werden. Sie sind ausschließlich an Störstellen wie Korngrenzen und Verzweigungen dieser sowie an Kristallimperfectionen zu finden. Der sichtbare Durchmesser der Poren wächst mit der Zeit und fortschreitender Schichtabnahme wie Abb. 5.15 zu entnehmen ist. Nach etwa 52-stündiger Schichtabtragung durch freie Konvektion wer-

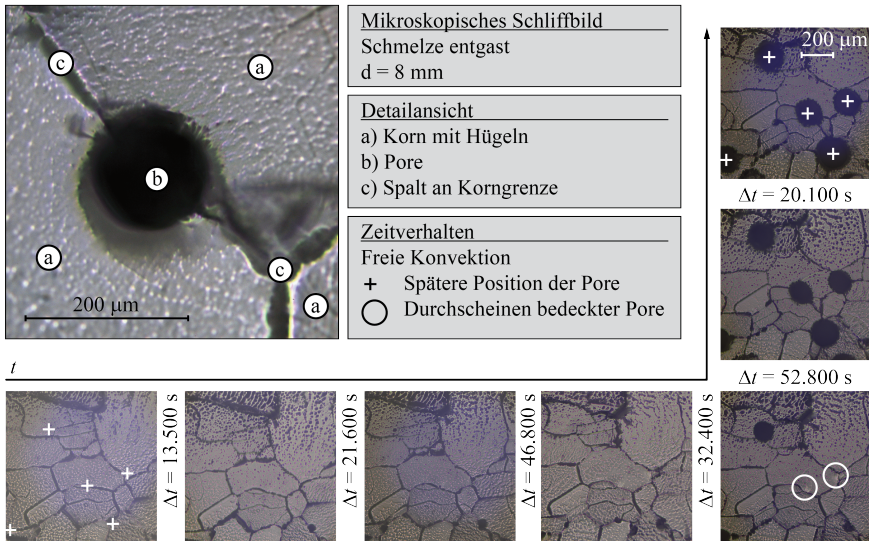


Abbildung 5.15.: Detailliertes mikroskopische Schlißbild einer Probe aus entgaster Schmelze zwischen verschiedenen Messungen einer Serie

den anfänglich offensichtlich verdeckte Poren freigelegt und zeigen einen Durchmesser von bis zu $250 \mu\text{m}$. Die Tiefe einer durchschnittlichen Pore wird durch die optische Oberflächenvermessung zu etwa $200 \mu\text{m}$ bestimmt, sobald der Porendurchmesser zirka $100 \mu\text{m}$ misst, was bei dieser Porentiefe notwendig ist, damit kein Schatteneffekt auftritt. Folglich sind die Poren näherungsweise sphärisch oder zumindest zylindrisch. Es könnte sich bei den Poren also um Blasen aus Gas handeln, das infolge sinkender Löslichkeit bei der Erstarrung der Naphthalin-Schmelze aus dieser abgeschieden wird und im erstarrenden Korngefüge Hohlräume bildet. Im Weiteren wird dieser Sachverhalt Blasen-Theorie genannt. Auch bei Proben aus entgaster Naphthalin-Schmelze kann die Blasen-Theorie gültig sein, wenn die Entgasung unzureichend ist. Eine andere denkbare Ursache der Poren ist ein anisotropes Sublimationsverhalten der Naphthalin-Kristalle. Die Auflösung der Körner in der Schichtebene müsste dazu schneller vonstattengehen (starke Sublimation) als die Auflösung senkrecht zur ihr (schwache Sublimation). Ausgehend von Korngrenzen und Imperfektionen würden so rein durch die Sublimation bedingte halbkugelförmige Löcher im Gefüge entstehen. Die notwendigen Imperfektionen zeigen alle Kristalle in Form von kleinen Hügeln auf deren Oberfläche (siehe a) in Abb. 5.15). Diese Idee wird im Folgenden als Verdampfungs-Theorie bezeichnet. Auch eine Kombination aus beiden Theorien ist durchaus denkbar. Ein Schnitt durch das sich nach der jeweiligen Theorie einstellende Gefüge ist in Abb. 5.16 skizziert. In beiden Fällen verändern sich die sichtbaren Durchmesser der Poren mit der Zeit t . Anders als bei der Blasen-Theorie, bei der der Porendurchmesser nur aufgrund der Projektion scheinbar größer und anschließend wieder kleiner wird, wächst die Pore bei der Verdampfungs-Theorie tatsächlich.

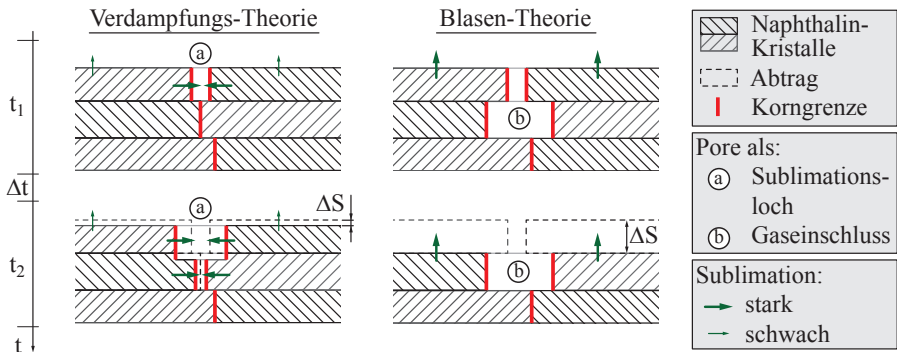


Abbildung 5.16.: Visualisierung der Theorien zur Ursache und Wachstum der Poren

Freigelegte Poren hinreichender Größe lassen sich wie in (a) von Abb. 5.17 gezeigt auch allein durch die optische Oberflächenvermessung identifizieren. Das Freilegen einer Pore während des Sublimationsvorgangs, also zwischen der PRE- und POST-Messung, führt zwangsläufig zur Interpretation von lokal sehr großen Schichtabnahmegeschwindigkeiten. Die Schichtdickenmessung mit einer Wirbelstromsonde hingegen besitzt nicht die ausreichende Auflösung, um sensitiv gegenüber den Poren zu sein. Dieses dürfte die Hauptursache für die im Vergleich zur Wirbelstrommessung größeren relativen Abweichungen sein, die mit der optischen Oberflächenvermessung ermittelt werden.

Einige Poren enthalten an ihrem Grund eine Akkumulation von Kristallen (siehe (d) von Abb. 5.17). Diese stört die optische Oberflächenvermessung und führt zu Fehlwerten, die nicht eindeutig identifizierbar sind und ein weiterer Grund für die hohen relativen Abweichungen sein könnte. Derartige Kristallakkumulationen lassen sich sowohl in Poren eines Gefüges finden, dessen vormalige Schmelze entgast ist, als auch in Poren eines Gefüges, dessen Schmelze unbehandelt bleibt. Im Gegensatz zur zuvor erwähnten scheinbaren Vergrößerung der Poren bleibt der Durchmesser dieser Poren nahezu unverändert, auch wenn die Naphthalin-Schicht innerhalb von 4.200 s um 90 μm reduziert wird (Vergleiche (b) und (c) von Abb. 5.17). Im Falle der Blasen-Theorie müsste es sich daher um zylindrische Poren handeln. Trifft die Verdampfungs-Theorie zu, könnte es sein, dass durch die Verdampfung der Kristallakkumulation eine fast vollständige Sättigung der Luft mit Naphthalin-Dampf innerhalb des Sublimationslochs vorliegt. Die Körner würden sich dann nur sehr wenig über deren Grenzen auflösen, sodass der Porendurchmesser nahezu erhalten bleibt.

Generell wird festgestellt, dass die Naphthalin-Schichten aus entgaster Schmelze meist größere und gleichmäßigere Kristalle aufweisen als Schichten aus unbehandelter Schmelze. Dieses zeigt der Vergleich des in (b) von Abb. 5.18 repräsentativ dargestellten mikroskopischen Schliffbilds einer Schicht aus entgaster Schmelze, mit dem in (c) von Abb. 5.17 gezeigten Schliffbild einer Schicht aus unbehandelter Schmelze. Es liegen pro Fläche also weniger Körner mit insgesamt kürzeren Korngrenzen vor. Trotzdem ist die Anzahl der Poren ähnlich zum Fall unbehandelter Schmelze.

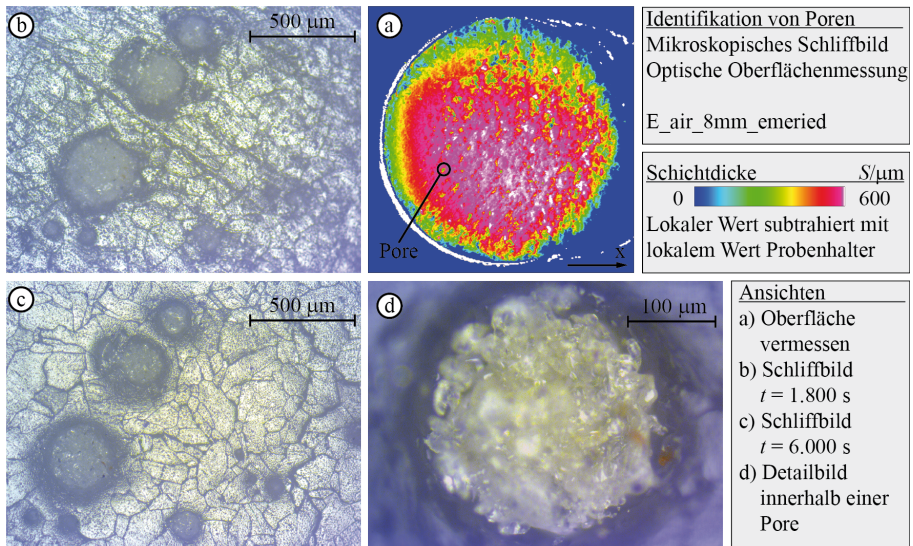


Abbildung 5.17.: Identifikation von Poren durch optische Oberflächenvermessung und Auflichtmikroskopie

Lediglich deren Größe ist anfänglich etwas geringer.

Die größeren und homogenen Kristalle können eine weitere Ursache für Messfehler bei der optischen Oberflächenvermessung sein. Deren hohe Transparenz lässt mehrfache Reflexionen zu und führt zu unglaublichen Daten. Obwohl das mit einer Tiefenschärfe von etwa $100\text{ }\mu\text{m}$ aufgenommene mikroskopische Bild (b) in Abb. 5.18 keine Unschärfe zeigt, wird durch die optische Oberflächenvermessung ein Höhenunterschied zwischen einem relativ großen Korn und dessen umgebenden Körnern von $400\text{ }\mu\text{m}$ bestimmt (siehe (c) in Abb. 5.18). Diese Diskrepanz ist bedingt durch die Unfähigkeit des Sensors, den Abstand zur Oberfläche sehr transparenter Objekte zu vermessen. Folglich werden, wie der Überlagerung aus Schliffbild und Oberflächen-daten (siehe (d) in Abb. 5.18) zu entnehmen ist, unsichtbare Objekte ignoriert und deren Begrenzungen als Stufen interpretiert. Je nach Ausrichtung der Begrenzung zur Pulsationsrichtung x verschwimmen diese Stufen, bedingt durch den Schatteneffekt zu breiteren Übergängen. Weiterhin werden Poren, von denen nicht gesagt werden kann, ob sie sich in oder unter dem transparenten Kristall befinden, als Erhöhungen von $400\text{ }\mu\text{m}$ vermessen.

Auswirkungen Die hohen relativen Abweichungen $|\Delta S_{rel}|$, welche sowohl durch Messungen mittels Wirbelstromsonde als auch mittels Laser Trigonometrie nachgewiesen werden, scheinen durch Poren maßgeblich bedingt zu sein. Die Poren, die in diesem Kontext bisher unbeachtet sind, werden als generelle Eigenschaft einer Naphthalin-Schicht bereits in [57] beobachtet. Die Poren sind eine bei der NSM unerwünschte Ei-

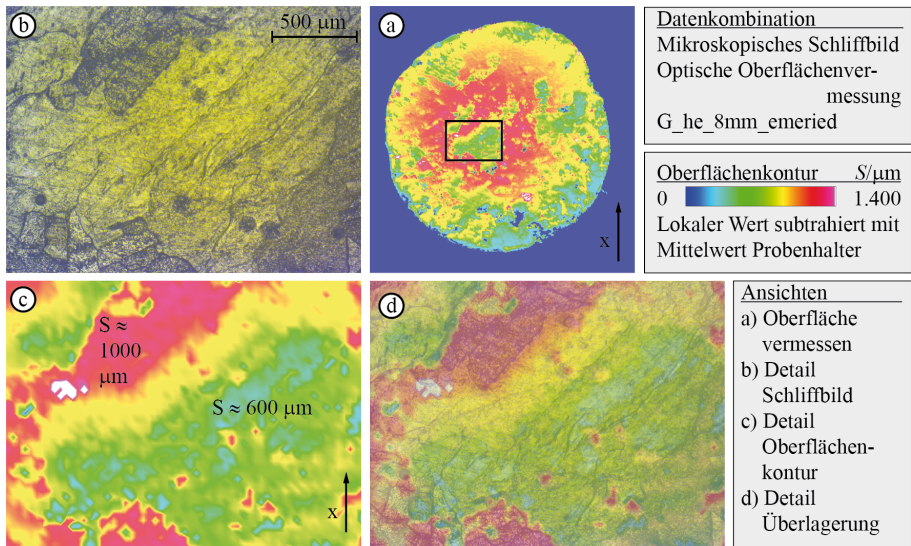
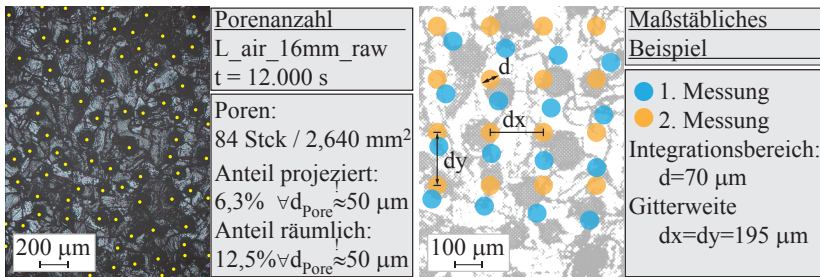


Abbildung 5.18.: Überlagerung von optisch vermessener Oberflächenkontur und mikroskopischem Schliffbild

genschaft der Naphthalin-Schicht, da die makroskopisch gemessene Schichtdickendifferenz ΔS kein Maß ist für die sublimierte Masse ΔM . Die Auswirkung für diese Diskrepanz lässt sich aufteilen in einen systematisch und einen stochastisch auftretenden Fehler.

Systematischer Fehler durch Poren Die Anzahl der Poren, sowie deren projizierter Flächenanteil werden in dieser Arbeit nicht für alle Messungen jeder Serie ermittelt. Bereits Stichproben zeigen, dass diese Größen weder mit der Zeit t noch mit der Schichtdicke S monoton korrelieren. Extreme Fälle, wie in Abb. 5.19a exemplarisch dargestellt, werden häufig beobachtet. Der projizierte Flächenanteil der Poren erreicht dann Werte von über 6,3%, wenn der Durchmesser aller Poren zu $d_{\text{Pore}} \approx 50 \mu\text{m}$ angenommen wird. Nach [58] besitzen die hier beobachteten und als halbsphärisch angenommenen Poren eine ausreichende Größe, um als diabat zu gelten. Folglich sind die Oberflächen der Poren relevant für die Sublimation, das heißt, die Mechanismen der Blasen- und der Verdampfungs-Theorie treten beide auf. Die Kontaktfläche zur Gasphase ist mit freigelegten Poren um 12,5% größer als mit überdeckten Poren beziehungsweise ohne Poren. Der Massenabtrag ΔM , der mit der Schichtdickendifferenz ΔS bestimmt wird, ist folglich um 12,5% geringer als der wahre Wert. Liegen in einem Teil der Schicht keine Poren vor, stimmen ermittelter und wahrer Massenabtrag jedoch überein. Als Konsequenz ist bei Wiederholungsmessungen eine einseitige Abweichung von etwa 12,5% $\equiv |\Delta S_{\text{rel}}| = 11,8\%$ durch die Poren erklärbar, abhängig von der Anzahl und Größe der Poren im betreffenden, abgetragenen Schichtteil. Dieses ist nur ein kleiner Teil der festgestellten relativen Abweichung $|\Delta S_{\text{rel}}|$ von



(a) Anzahl und Flächenanteile der Poren

(b) Poren und Positionierungsfehler

Abbildung 5.19.: Beispiele zur Anzahl und Größe der Poren, sowie deren Vergleich zur Positioniergenauigkeit der Proben

bis zu 138%. Er stimmt jedoch sehr gut überein mit der, in realtive Abweichung umgerechneten Schwankung aus [3] von $|\Delta S_{\text{rel}}| \approx 12\%$. Da diese Schwankung auch bei Schichtabnahmen bis zu $\Delta S = 200 \mu\text{m}$ (siehe Abb. 5.6) festgestellt werden, sind vermutlich mehrere Lagen an Poren von $d_{\text{Pore}} \approx 50 \mu\text{m}$ in dieser Schicht enthalten, was ein Indiz für die Blasen-Theorie ist. Die Schwankungen sind daher systematischer Natur. Auch bei Schichtabnahmen über hinreichend viele Porenlagen wird die relative Abweichung daher nicht unter 12% sinken. Sind die Poren Gasblasen, so tritt ein weiterer systematischer Fehler auf, wenn Poren in der abgenommenen Schicht enthalten sind. Um das Niveau der sublimierten Masse dann richtig zu bestimmen, müsste die mittlere Volumendichte der Poren in der Massendichte der Naphthalin-Schicht Berücksichtigung finden. In diesem Fall ist die Massendichte des Sublimats um 4,2% geringer, sofern die Masse der Poren selbst vernachlässigbar ist. Die mittels NSM auf Basis der Wirbelstromsonde ermittelten Sherwood-Zahlen dürften daher etwa 4...5% größer sein als die wahren. Bei der Verwendung der optische Oberflächenvermessung könnte dieser Fehler minimiert werden, wenn die identifizierbaren Poren in PRE- und POST-Messung rechnerisch mit einbezogen werden.

Stochastischer Fehler durch Poren Die größere relative Abweichung bei der optischen Oberflächenvermessung kommt durch einen zufälligen Fehler zustande. Im Moment, indem teilweise bedeckte Poren ausreichend freigelegt werden, steigt die lokale Schichtdickenabnahme um die verbleibende Porentiefe sprunghaft an, da der Laser-Strahl den Boden der Pore erreicht. Bei Untersuchungen, bei denen üblicherweise lokale Schichtabnahmen von weniger als $\Delta S = 100 \mu\text{m}$ auftreten, liefert ein Aufbrechen einer sphärische Pore vom Durchmesser $d_{\text{Pore}} \approx 50 \mu\text{m}$ mit einer dann noch messbaren⁵ Tiefe von etwa $105 \mu\text{m}$ eine relative Abweichung von $|\Delta S_{\text{rel}}| \approx 40\%$ im Vergleich zur Messung ohne die Existenz der Pore. Haben die Poren, wie in Abb. 5.15 repräsentativ gezeigt, einen Durchmesser von $d_{\text{Pore}} \approx 200 \mu\text{m}$, steigt die relative Abweichung durch Porenaufdeckung auf $|\Delta S_{\text{rel}}| \approx 100\%$. Diese Abweichungen entstehen auch, wenn die Poren bei zwei Schichtdickenvermessungen durch den unvermeidbaren Po-

⁵Aufgrund des Schatteneffekts, siehe Abb. 3.4

sitionierungsfehler an hinreichend unterschiedlicher Stelle zu liegen kommen, wie in Abb. 5.19b exemplarisch dargestellt. Hier reichen bereits wenige μm Versatz oder wenige Grad Verdrehung der Messgitter zueinander in der x - y -Ebene, um an einer Position eine Pore zu vermessen, welche bei der Wiederholungsmessung nach neuem Positionieren der Probe dort nicht mehr festgestellt wird. Dieses gilt prinzipiell auch für Poren in oder unter transparenten Kristallen, nur dass hier auch eine Schichtzunahme beobachtet werden kann und vereinzelt auch wird. Insgesamt ist die größere relative Abweichung bei der optischen Oberflächenvermessung daher durch die Aufdeckung von Poren beziehungsweise durch die Positionierungsungenauigkeit erklärbar.

Gesamter Fehler durch Poren Die Summation von stochastischem und systematischem Fehler liefert eine relative Abweichung von bis zu $|\Delta S_{rel}| \approx 112\%$, welche recht gut zu den aus Messungen ermittelten Werten passt (siehe Abb. 5.12 und Abb. 5.13). In der praktischen Anwendung der NSM ist die Kernfrage daher, wie viele Poren und in welcher Größe zu welchem Zeitpunkt existieren. Um einen Ansatz für die Beantwortung zu finden, müssen das Verhalten Poren und deren Gründe verstanden sein. Im Rahmen dieser Arbeit können hierzu nur Vermutungen angegeben werden. Die grundsätzlichen Ursachen zu den Poren dürften allerdings in der erwähnten Blasen-Theorie und der Verdampfungs-Theorie liegen.

Blasen-Theorie Der Mechanismus zur Generierung von Poren könnte die Ausfällung von Gas während der Erstarrung der Schmelze sein. Grund hierfür müsste ein geringeres Gaslösungsvermögen von festem Naphthalin sein im Vergleich zum flüssigen. Ausgehend von einem Keim, wie beispielsweise einem bereits existierenden Kristall, einem Fremdeinschluss oder einer Gasblase, würde dann ein Kristall heranwachsen und an seinen Grenzen das ausgefällte Gas abscheiden. Dieses bildete durch Oberflächenspannungen sphärische Blasen, die durch die umgebenden, erstarrten Kristalle am Auftreiben gehindert würden. Ob es sich bei dem Gas um Verbindungen mit Naphthalin-Anteilen handeln könnte oder um andere Moleküle ist unbekannt. Allerdings zeigt die Gaswaschung mit Helium, welches das gelöste Gas in der Schmelze substituiert und bei Ausfällung nur wenige kleine Blasen bilden soll, keine erkennbar positive Wirkung im Bezug auf die relative Abweichung. Es könnte daher sein, dass die Waschung der Schmelze unzureichend ist. Auszuschließen ist auch nicht, dass das Helium selbst ähnliche Blasen bewirkt wie ein anderes Gas. Eine abschließende Antwort können nur zukünftige, detailliertere Untersuchungen liefern. Jedoch selbst wenn eine intensivere Gaswaschung die Porenbildung verhindern kann, wird die Beschichtung von Kühlkanalmodellen mit entgaster Schmelze ohne Kontamination mit Luft notwendig werden. Die Modelle müssten vollständig gasdicht und mit Helium spülbar sein. Gleichzeitig bleibt die Vorwärmung des Kanals notwendig. Beides wäre nur mit sehr hohem technischen Aufwand möglich, der die Praktikabilität der NSM in Frage stellen würde.

Verdampfungs-Theorie Ein weiterer Mechanismus, der Poren hervorbringen könnte, ist die Art, wie Naphthalin-Kristalle gegebenenfalls sublimieren. Die Poren würden dann eine immanente, unvermeidbare Eigenschaft der NSM sein. Eine akzeptier-

te Theorie zur Verdampfung von Kristallen basiert auf der Hertz-Knudsen-Effusions-Gleichung Gl. 5.5 (in dieser Form angegeben in [59], Urquelle ist [60] beziehungsweise phänomenologisch [61]). Sie beschreibt die Verdampfungsrate \dot{n}_α sofern kein molekular diffusiver Widerstand in der Gasphase vorliegt. Dieser Widerstand ist inexistent, wenn die Teilchen in der Gasphase keine Wechselwirkungspotentiale besitzen und Teilchenstöße nicht auftreten. Teilchen werden daher nicht von anderen Teilchen der Gasphase daran gehindert, in oder aus der Fest- beziehungsweise Flüssigphase zu wechseln. Experimentell lässt sich die Hertz-Knudsen-Effusions-Gleichung daher nur für den Sonderfall der Verdampfung ins Vakuum näherungsweise lösen. Dann ist der partielle Druck in der Gasphase $p_{p,\infty}$ Null und das treibende Sublimationsdruckgefälle maximal. Grundsätzlich kann die Theorie hinter der Hertz-Knudsen-Effusions-Gleichung jedoch eine lokal unterschiedliche Sublimation erklären, welche Poren erzeugen würde.

$$-\dot{n}_\alpha = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi m_M k_B T}} [p_v - p_{p,\infty}] \quad (5.5)$$

Der entscheidende Faktor in Gl. 5.5 ist der Kondensationskoeffizient⁶ α . Er ist das Verhältnis von tatsächlicher zur theoretisch größtmöglichen Verdampfungsrate und entspricht daher maximal Eins. Die theoretisch größtmögliche Verdampfungsrate ist jene, bei der alle Teilchen, die auf die Phasengrenze treffen, auch durch diese hindurch gehen und nicht zurückgeworfen werden. Aus Experimenten werden gewöhnlich Verdampfungskoeffizienten kleiner Eins $\alpha < 1$ bestimmt (zum Beispiel in [60]). Bei der Verdampfung eines Kristalls, also bei der Sublimation, könnte der Grund hierfür die Art und Weise sein, wie sich Moleküle aus einem Kristallgitter lösen und an dieses anlagern. Einen Ansatz zur mathematischen Beschreibung dieser Prozesse liefern [62] und [63] mit der Kossel-Stranski-Theorie. Eine detaillierte Beschreibung dieser Modellvorstellung findet sich in [64]. Nach der Kossel-Stranski-Theorie ist der Ort, an dem sich Moleküle aus einem Kristall lösen oder anlagern, sowie der Weg, den sie dabei nehmen, durch das Zusammenspiel der dazu notwendigen spezifischen Energien determiniert. Unterschieden wird dabei die Anlagerungsenergie für Flächen, Kanten und Ecken, worunter die in Abb. 5.20a mit 1, 2, 3 gekennzeichneten Orte zu verstehen sind. Die Energie zum Transfer eines Moleküls in die Dampfphase ergibt sich aus der Summe von Energieanteilen Φ_{nm} für den jeweiligen Pfad des Moleküls. Aus diesem Ansatz folgt eine schrittweise Reduktion des Kristallgitters, Teilchenlage um Teilchenlage, ausgehend von einer Gitterstufe (analog zum Wachstumsmodus nach van der Merve in Abb. 5.20b), ohne dass sich die gelösten Moleküle wieder anlegen. Für einen perfekten Einkristall, der einer ausreichend untersättigten Gasphase ausgesetzt ist, scheint sich dieses Modellverhalten nach [65] experimentell und nach [66] theoretisch/numerisch zu bestätigen. Perfekte Kristalle liegen jedoch nur selten in Naphthalin-Korngefügen vor, wie aus [67], [68] und [69] zu entnehmen ist. Die Imperfektionen und Unreinheiten repräsentieren dann Gitterstufen, an denen die Verdampfungsrate am größten ist. Allerdings können die Imperfektionen auch so nah zu-

⁶Auch bezeichnet als Verdampfungskoeffizient oder Akkommodationskoeffizient, wenn als übertragene Eigenschaft nicht die Teilchen, sondern deren Energie verwendet wird. Dieser ist nicht zu verwechseln mit dem Wärmeübergangskoeffizienten.

einander liegen, dass sich gelöste Moleküle an diese wieder anlagern, anstatt in die Gasphase zu wechseln. Beide Phänomene, Imperfektionen und Unreinheiten können mit der optischen Mikroskopie nicht direkt beobachtet werden. Die NSM kann aber als eine Ätzbild-Methode aufgefasst werden, wie sie in [67] und [57] Verwendung findet. Über Ätzbilder lassen sich, wie in [68] und [70] gezeigt wird, potentielle Gitterdefekte in der Kristalloberfläche lokalisieren, indem diese mikroskopisch sichtbare Grübchen und Hügel bilden. Diese Indikatoren ähneln sehr den hier zahlreich beobachteten Hügeln (siehe Abb. 5.15 im Bereich ③). Nach [71] (Kap.6.3, S.95) bewirkt die spanende Bearbeitung der Oberfläche vermehrte Gitterdefekte. Daher dürften die Kristalle der Naphthalin-Schicht generell und erst recht beim Schleifen der Oberfläche sehr viele Imperfektionen aufweisen, an denen der Gitterabbau durch Verdampfung voranschreitet. Verdampft ein Kristall ohne kovalente Bindungen aufzuheben⁷, entspricht die Summe der Transferenergien über alle in die Gasphase transportierten Moleküle der makroskopisch feststellbaren Sublimationsenergie $\Delta_G U$. Experimentell ermittelte Werte der Gitterenergie für Naphthalin verschiedener, in [72] zusammengefasster Quellen zeigen eine relativ große Abweichung von etwa 84%_{MW}. Als vertrauenswürdigster Wert wird dort $\Delta_G U = 17.300 \text{ cal/mol} \approx 72,4 \text{ kJ/mol}$ angegeben. Ähnliche Werte von etwa $\Delta_G H \approx 73 \text{ kJ/mol}$ zeigt auch die deutlich reichhaltigere Zusammenfassung von Untersuchungsergebnissen zur Sublimationsenthalpie $\Delta_G H$ von Naphthalin in [73], die auch die Werte aus [72] beinhaltet. Allerdings ist die Abweichung der Sublimationsenthalpie zwischen den Quellen bei einer repräsentativen Temperatur von $T_m = 298 \text{ K}$ mit 13,5%_{MW} immer noch relativ groß. Sublimationsenthalpie $\Delta_G H$ und Sublimationsenergie $\Delta_G U$ sind in diesen Fällen vergleichbar, da in den Experimenten der Druck der Dampfphase sehr gering gehalten wird. Die Volumenänderungsarbeit $p \cdot \Delta V_m = \Delta_G H - \Delta_G U$ ist damit nahezu vernachlässigbar. Die Ursache der Schwankung von Sublimationsenthalpie und -energie beziehungsweise Gitterenergie könnte daher ein Indiz für unterschiedlich hohe Konzentrationen an Kristallimperfektionen sein, die in den einzelnen Experimenten vorlagen. Damit wäre der Kondensationskoeffizient α von der Imperfektionsdichte abhängig und essentieller Faktor der Verdampfungstheorie.

Eine weitere und in [60] vermutete, mögliche Ursache für einen verminderten Kondensationskoeffizienten ($\alpha < 1$) ist die Abdeckung des Kristallgefüges durch Fremdmoleküle. Diese stellen einen molekularen Widerstand dar, der zwar der Grundvoraussetzung der Hertz-Knudsen-Effusions-Gleichung widerspricht, aber einen enormen Einfluss auf die Sublimation haben könnte. Beim üblichen Vorgehen der NSM kann eine Überdeckung der Naphthalin-Schicht durch Fremdstoffen beispielsweise aus der Luft nicht ausgeschlossen werden.

Neben dem Kondensationskoeffizienten könnte auch der lokale Dampfdruck p_v die örtliche Verdampfungsrate beeinflussen, auch wenn ausschließlich perfekte, unbedeckte Naphthalin-Kristalle vorliegen. Viele experimentell bestimmte Werte für den Dampfdruck von Naphthalin weichen erkennbar voneinander ab, wobei in allen Untersuchungen Kristall-Gefüge und keine Einkristalle vorliegen. Der Vergleich des Dampfdrucks ermittelt in [75] für eine Temperatur $T = 313,52 \text{ K}$ und jenem angegeben in [76] bei $T = 313,88 \text{ K}$ zeigt eine Abweichung von etwa 8%_{MW}. Allerdings sind

⁷Bei der Sublimation von Naphthalin wird dieses postuliert.

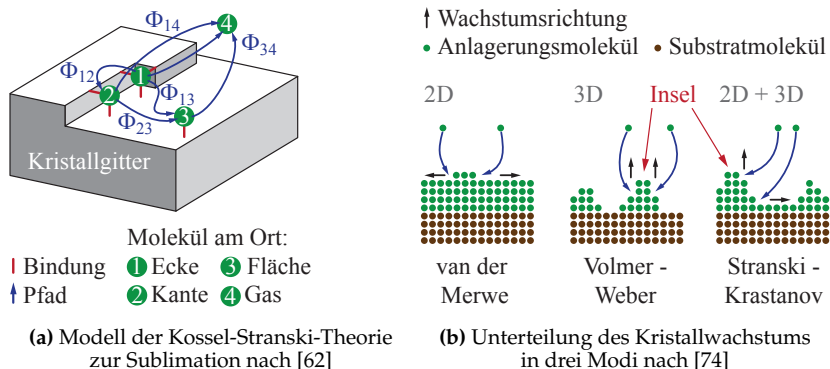


Abbildung 5.20.: Molekulares Verhalten von Kristallen

die Ergebnisse der letztgenannten Veröffentlichung ganz offensichtlich von geringer Qualität, da entgegen der Erwartung für höhere Temperaturen teilweise geringere Dampfdrücke⁸ angegeben werden. Dieses zeigt, dass trotz des enormen Aufwands zur Konstanzhaltung der experimentellen Bedingungen der Dampfdruck variierend vermessen wird. Ursache hierfür könnte die Gestalt der Kristalle sein, wie aus der Untersuchung [66] zum Verdampfungsverhalten von Schwefel-Einkristallen zu adaptieren ist. Je nach Gitterebene wird ein unterschiedlicher Dampfdruck ermittelt. Beispielsweise ergibt sich eine Abweichung im Dampfdruck von etwa 35,5%_{MW} zwischen zwei unterschiedlich orientierten Gitterebenen⁹ bei einer Temperatur von $T = 307,7$ K. Entsprechend wird auch der Kondensationskoeffizient von etwa Eins $\alpha \approx 1$ bei unterschiedlichen Temperaturen ermittelt, je nach vermessener Gitterebene. Sollten auch Naphthalin-Kristalle je nach Gitterebene unterschiedliche Dampfdrücke zeigen, so wäre bei der NSM nicht nur die örtliche Verdampfungsrate unterschiedlich und würde gegebenenfalls zu Poren führen, sondern nach der Annahme aus [6] auch der partielle Druck des Naphthalin-Dampfes über der Naphthalin-Schicht. Das treibende Partialdruckgefälle der Diffusion wäre damit lokal unterschiedlich, ohne dass diesem Rechnung getragen würde.

Indizien für die Verdampfungs-Theorie In [74], [77], [78] und [79] wird gezeigt, dass die Oberflächenkristalle des Substrats für die Struktur der ersten Anlagerungsmoleküllagen von polyzyklischen Aromaten, darunter auch Naphthalin, entscheidend ist. Die Gitterausrichtung der Kristalle von Substrat- und Anlagerungsmolekülen, sowie deren unterschiedliche Wechselwirkungspotentiale bedingen primär die drei in Abb. 5.20b skizzierten Wachstumsmodi. Grundsätzlich dürfte der Kristallabbau nach den inversen Modi ablaufen. In [80] wird allerdings angemerkt, dass der Einfluss des Substrats mit steigender Anlagerungsschichtdicke abnehmen dürfte. Bei ausreichend vielen Moleküllagen liegt dann ein Kristallwachstum nach van der Merwe vor. Der

⁸ $p_v \approx 48,94$ Pa bei $T = 313,88$ K und $p_v \approx 88,77$ Pa bei $T = 311,49$ K

⁹Verwendet werden hier die Ebenen (011) und (111) des orthorhombischen Schwefel-Kristalls

Kristallabbau wird invers dazu, Moleküllage um Moleküllage erfolgen. Allenfalls die makroskopische Oberflächenrauigkeit des Substrats dürfte dann das Korngefüge prägen. Es ist aber nicht auszuschließen, dass Auswirkungen der substratnahen Inselformationen auf der Oberfläche einer dickeren Schicht erkennbar sind. Weiterhin könnten neue Anlagerungsformationen durch ein Kristallwachstum/-abbau nach Volmer-Weber oder Stranski-Krastanov an Verunreinigungen hervorgerufen werden. Diese Formationen wären dann Ausgangspunkt zur Bildung der unter ④ in Abb. 5.15 zu erkennenden Hügel. In [74] mittels Rasterkraftmikroskopie gefundene „knubbelförmige“ Inseln, auf einem 10 nm dicken PEN-Tetron¹⁰ Film auf Kupfersubstrat Cu(221) nach einer mehrmonatigen Aussetzung an Luft, ähneln den Hügeln in Form und Größe. Die Inseln sind laut [74] nicht vom Substrat induziert und auch nicht durch Oxidation bedingt. Deren eigentliche Ursache ist jedoch nicht vollständig ermittelt und könnte daher in einer Verunreinigung liegen. Insgesamt dürften die Hügel aber ein Indiz für das Zutreffen der Verdampfungs-Theorie sein.

Chemische Reaktionen als weitere Ursache Sowohl die Mechanismen der Blasen-Theorie als auch der Verdampfungs-Theorie könnten durch chemische Reaktionen hervorgerufen beziehungsweise gestärkt werden. Bekannt und zahlreich untersucht sind vor allem die Oxidationen von Naphthalin zu Kohlendioxid CO₂ und zu Phthalsäureanhydrid (PSA) C₈H₄O₃. Beide Reaktionen benötigen ohne Katalysator deutlich höhere Temperaturen als sie während des Schmelzvorgangs vorliegen, um messbare Anteile an Reaktionsprodukten zu erhalten. Eine katalytische Reaktion in der Gasphase, wie sie durch die Anwesenheit von Metalloxiden (siehe [81], [82]) oder Palladium-Nanopartikel (siehe [83]) erreicht wird, produziert aber bereits bei geringen Temperaturen von $T \approx 400$ K bis zu etwa 5% CO₂. Die Umformung von Naphthalin zu PSA in messbaren Anteilen benötigt trotz Katalysatoren tendenziell etwas höhere Temperaturen von $T > 640$ K (siehe [84], [85], [86]). In dieser Arbeit erfolgt der Schmelzvorgang in der Beschichtungsanlage (Beschreibung siehe [3]) über eine Dauer von etwa 6 h unter dem Einfluss von Luftsauerstoff. Die Temperatur wird dabei in der Mitte des Schmelzbehälters gemessen und zur Regelung der Heizelemente verwendet. Die Abschalttemperatur liegt bei $T \approx 395$ K. Welche räumliche Temperaturverteilung im Bad, insbesondere nahe der Heizelemente, vorherrscht, ist unbekannt, da diese bisher als irrelevant erachtet wurde. Die nicht zur Beschichtung verwendete Schmelze kristallisiert in der Anlage und wird für weitere Beschichtungen wieder verflüssigt. Es ist daher nicht auszuschließen, dass sich während des Schmelzvorgangs PSA oder Kohlendioxid bilden und in die Naphthalin-Schicht integriert werden. Einerseits betreffen diese Reaktionsprodukte die Blasen-Theorie, da die Poren Blasen aus PSA-Dampf oder Kohlendioxid sein könnten. Andererseits ist PSA bei Umgebungsbedingungen kristallin und sublimiert (siehe [87]) ähnlich wie Naphthalin allerdings mit einem etwa um Faktor 100 kleineren Dampfdruck von $p_{v,PSA}|_{298\text{ K}} \approx 0,13$ Pa (siehe [88]) im Vergleich zu $p_{v,Naphthalin}|_{298\text{ K}} \approx 11,3$ Pa (siehe [75]). Bei gleichen Bedingungen wird der Sublimationsstrom des PSA daher größer ausfallen als der von Naphthalin $\dot{n}_{\alpha,PSA} > \dot{n}_{\alpha,Naphthalin}$. Ein örtlich unterschiedlicher Abbau der Naphthalin-Schicht, gegebenenfalls in Form von Poren wäre die Folge.

¹⁰C₂₂H₁₄O₄

Fazit Die makroskopisch beobachtete schlechte Reproduzierbarkeit lässt sich mit Poren in der Naphthalin-Schicht schlüssig erklären. Eine fundiert begründete Ursache für die Poren ist aber nicht vorhanden. Für das Zutreffen der Blasen-Theorie als auch der Verdampfungs-Theorie lassen sich allerdings in verschiedenen Untersuchungen Indizien finden.

5.1.3. Kernaussagen zur Reproduzierbarkeit

Für die in dieser Arbeit verwendete Form der NSM wird eine Schwankung von $|\Delta S_{rel}| = 138\%$ ermittelt. Etwa $|\Delta S_{rel}| = 12\%$ können der, durch Poren bedingten zeitlich schwankenden diabaten Oberfläche zugeschrieben werden. Die höhere Sensitivität der optischen Oberflächenvermessung liefert eine weitere, erklärbare relative Abweichung von bis zu $|\Delta S_{rel}| = 100\%$. Bei Untersuchungen von Kühlkanälen mittels NSM werden die Verteilungen der Sherwood-Zahl auf den Kanalwänden folglich nur dann verlässlich sein, wenn diese räumliche Unterschiede zeigen, die deutlich größer sind als die relative Abweichung $|\Delta S_{rel}| = 138\%$. Wandverteilungen der Sherwood-Zahl, bei denen der maximal zu findende Wert nur um den Faktor 5,5 größer ist als der minimale, sind damit nicht aussagekräftig, da sie vollständig im Schwankungsbereich liegen. Auch Verteilungen der Sherwood-Zahl mit deutlich größeren Verhältnissen von Maximal- zu Minimalwert sind primär nur qualitativ verwertbar. Ausnahmen sind Fälle, bei denen eine Ungenauigkeit von 550% im Niveau der Sherwood-Zahl akzeptiert werden kann.

5.2. Experimentelle Untersuchung der Prallkühlung

Einer der zwei repräsentativen Fälle zur Validierung der SAM ist die in Kap. 2.5 beschriebene Prallkühlung. Untersucht wird der Stoffübergang von den Kanalwänden (siehe Abb. 2.4) an die durchströmende Luft mittels NSM. Die Ergebnisse werden in Kap. 5.2.1 diskutiert. Variiert werden dabei die Reynolds-Zahl Re_{A1} nach Gl. 5.6, die Rotationszahl Ro_{A1} nach Gl. 5.7, der Anstellwinkel zur Rotationsachse α und die Art der Fluidabfuhr. Hierbei gibt κ den Anteil am Massenstrom an, der durch die Bohrungen B1 und B2 abgeführt wird.

$$Re_{A1} = \frac{\rho(T, p) d_{A1} u_{A1}}{\eta(T, p)} \quad (5.6)$$

$$Ro_{A1} = \frac{\omega d_{A1}}{u_{A1}} \quad (5.7)$$

Zur Bildung der Reynolds-Zahl wird der hydraulische Durchmesser der Einströmbohrungen $d_{A1} = d_{A2}$ als charakteristische Länge verwendet. Als charakteristische Geschwindigkeit wird die mittlere Strömungsgeschwindigkeit in den selbigen Bohrungen $u_{A1} = u_{A2}$ herangezogen. Die Stoffwerte Massendichte $\rho(T, p)$ und dynamische Viskosität $\eta(T, p)$ werden mittels gemessener Zustandsgrößen berechnet. Die Rotationszahl wird mit der Drehkreisfrequenz ω und derselben charakteristischen Länge und Geschwindigkeit gebildet, die bei der Reynolds-Zahl verwendet werden. Die Werte der Variationsparameter sind in Tab. 5.1 angegeben. Im Folgenden werden nur

Messergebnisse von ausgewählten repräsentativen Parameterkonstellationen zur Aus-sagengenerierung verwendet.

κ Re_{A1}	10k	20k	1,0 30k	40k	0,5 40k	0,0 25k
$Ro_{A1} = 0,000.0$		$\alpha = \{\}$	$\alpha = \{\}$	$\alpha = \{\}$	$\alpha = \{\}$	$\alpha = \{\}$
$Ro_{A1} = 0,008.0$		$\alpha = 0^\circ$ $\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 0^\circ$ $\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 0^\circ$ $\alpha = 45^\circ$ $\alpha = 25^\circ$		
$Ro_{A1} = 0,001.7$		$\alpha = 0^\circ$ $\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 0^\circ$ $\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 0^\circ$ $\alpha = 45^\circ$ $\alpha = 25^\circ$ $\alpha = 205^\circ$		
$Ro_{A1} = 0,002.3$		$\alpha = 0^\circ$ $\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 0^\circ$ $\alpha = 45^\circ$			
$Ro_{A1} = 0,002.7$						$\alpha = 0^\circ$
$Ro_{A1} = 0,003.4$		$\alpha = 0^\circ$ $\alpha = 45^\circ$ $\alpha = 180^\circ$	$\alpha = 0^\circ$ $\alpha = 45^\circ$	$\alpha = 0^\circ$ $\alpha = 45^\circ$		
$Ro_{A1} = 0,006.6$	$\alpha = 0^\circ$					

Tabelle 5.1.: Vermessene Parameterkonfigurationen des Stoffübergangs im Prallkühlkanal

Weiterhin wird das Strömungsgeschwindigkeitsfeld innerhalb der leicht modifizierten Geometrie (siehe Kap. 3.1.7) bei einer Reynolds-Zahl von $Re_{A1} = 20k$ und einer Rotationszahl von $Ro_{A1} = 0$ mittels MRV experimentell bestimmt und charakterisiert. Die Massenabfuhr erfolgt dabei ausschließlich durch die Abfuhrbohrungen B1 und B2 (entspricht $\kappa = 1, 0$). Die Ergebnisdarstellung erfolgt in Kap. 5.2.2.

Sowohl die Ergebnisse der Strömungsfeldvermessung als auch der Stoffübergangs-messung wurden bereits vom Autor in [4] veröffentlicht und sind in diese Arbeit ohne explizite Zitierung integriert.

5.2.1. Stoffübergang der Prallkühlung

Generell wird bei allen Auswertungen des Stoffübergangs in Form der Sherwood-Zahl Sh die Fernfeldkonzentration zu Null gesetzt

$$\zeta_\infty \stackrel{!}{=} 0$$

Der Einfluss einer Rückströmung oder einer Konzentrationsanreicherung in Totwas-sergebieten ist damit als vernachlässigbar postuliert. Die Kanalwände A, B, C, D sind anders als Boden und Deckel beschichtet und damit diabat. Für einen Großteil der Messungen wird die Naphthalin-Schicht auf allen Kanalwänden mit Ausnahme von Wand D vor der PRE-Messung durch Fräsen mechanisch bearbeitet. Die Bearbeitung der Schicht auf Wand D erfolgt durch manuelles Schleifen. Nach der Bearbeitung findet eine kurzzeitige¹¹, konvektiv getriebene Sublimation zur „Entstaubung“ der Ober-

¹¹ Etwa 10 Minuten bei $Re_{A1} = 20k$

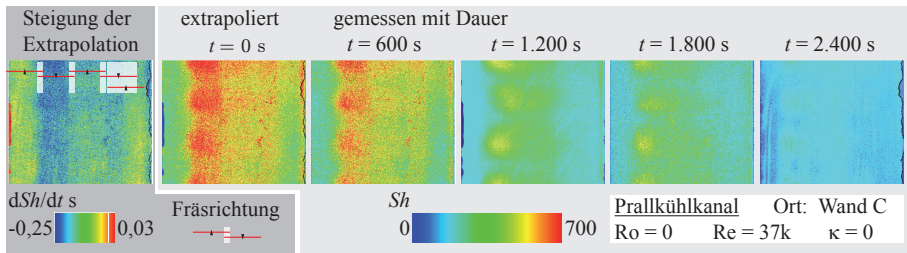


Abbildung 5.21.: Verteilung von Sh auf Wand C des Prallkühlkanals gemessen bei verschiedenen Messdauern und extrapoliert zum Zeitpunkt $t = 0$ s sowie die Steigung der linearen Regression von $Sh(t)$ basierend auf den vier Messdauern.

fläche statt. Bei einigen Messungen wird die Schicht eines vorangegangenen Versuchs ohne Bearbeitung weiterverwendet. Für die Messungen zur Parameteruntersuchung (Re , Ro , κ , α) erfolgt die Schichtabnahmevermessung zur Minimierung des Messaufwandes nur im Bereich der fünfeinhalb radial äußersten Bohrungen der Reihe A2, also auf nur rund 61% der Kanallänge. Die Auflösung ist dabei isodistant 1/mm. Bei den Messungen zur Reproduzierbarkeit wird ein Bereich von der dritten bis zur sechsten radial innen liegenden Bohrung A1, also ein Segment von rund 48% der Kanallänge mit einer isodistanten Auflösung von 4/mm vermessen. Die Naphthalin-Schicht wird vor jedem Reproduzierbarkeitsversuch durch mechanisches Bearbeiten geglättet, jedoch nicht durch erzwungene Konvektion entstaubt.

Reproduzierbarkeit der Sherwood-Zahl

Ähnlich zu den Messergebnissen nahe eines Dralllochs (siehe Kap. 5.1.1) werden auch beim Prallkühlkanal bei Wiederholungsmessungen unterschiedliche Niveaus der Sherwood-Zahl bestimmt. Die Darstellung Abb. 5.21 zeigt die Verteilungen von Sh auf der Wand C, berechnet aus Messungen bei vier verschiedenen Dauern aber sonst gleichen Parametern. Je nach Messdauer liegen die pro Messung maximal auftretenden Sherwood-Zahlen im Bereich von $Sh \approx 350 \dots 700$. Die zum Zeitpunkt $t = 0$ s linear extrapolierte Sherwood-Zahl ist mit $Sh \approx 750$ mehr als doppelt so groß wie die Sherwood-Zahl, bestimmt bei einer üblichen Messdauer von $t = 2.400$ s. Es ist daher bei allen Messergebnissen eine relative Abweichung der Sherwood-Zahl von mindestens $|\Delta Sh_{rel}| = 67\%$ zu berücksichtigen. Dieser Wert ist erwartungsgemäß höher als $|\Delta S_{rel}| = 12\%$ bei der Vermessung des Dralllochs mit Wirbelstromsonde, die relativ unsensitiv gegenüber Poren ist. Der Einfluss der Poren ist jedoch nicht so groß wie die $|\Delta S_{rel}| = 138\%$ bei den Doppelproben-Sublimations-Experimenten. Ursache hierfür dürfte die geringere räumliche Auflösung sein. Der Messgitterabstand bei Reproduzierbarkeitsmessungen am Prallkühlkanal ist mit $250 \mu\text{m}$ etwas größer als die zu erwartenden Porendurchmesser. Maximal entfällt daher nur ein Messpunkt auf eine Pore. Bei den Doppelproben-Sublimations-Experimenten sind es deutlich mehr. Wäre die Porendichte und Porengrößenverteilung räumlich homogen, so müsste die relative Abweichung unabhängig von der gewählten Auflösung sein und folglich bei der

Vermessung des Prallkühlkanals und den Doppelproben-Sublimations-Experimenten identische Werte annehmen. Da dem nicht so gegeben ist, verhärtet sich die bereits gezogene Schlussfolgerung, dass die Poren in ihrer Größe und ihrer räumlichen Verteilung als zufällig angesehen werden müssen. Bei höherer räumlicher Auflösung des Prallkühlkanals dürfte sich die relative Abweichung der Sherwood-Zahl daher dem Wert der Doppelproben-Sublimations-Experimente von 138% nähern. Ein Indiz für das zahlreiche Vorhandensein der Poren ist das ausgeprägte räumliche Rauschen der Sherwood-Zahl-Verteilung wie es in Abb. 5.21 sowie in allen weiteren Ergebnisdarstellungen zu erkennen ist.

Anders als die Messergebnisse nahe eines Dralllochs zeigt die in Abb. 5.21 dargestellte Verteilung der Steigung der linearen Regression dSh/dt eine gewisse Ähnlichkeit zu den Konturen der Sherwood-Zahl. Diese bezieht sich jedoch überwiegend auf rechteckige, streifenförmige Strukturen, die auf die mechanische Bearbeitung der Naphthalin-Schicht vor der PRE-Messung zurückzuführen sind. Es besteht eine gute Deckungsgleichheit dieser Strukturen mit den Frässpuren und deren Überlappungsgebieten. Abgesehen von diesen Strukturen ist jedoch keine Ähnlichkeit zwischen den Verteilungen von dSh/dt und Sh festzustellen. Die sich ändernde Grenzschicht aufgrund der sich verändernden Oberflächenkontur hat daher keine hier messtechnisch nachweisbare Wirkung auf den Stoffübergang. Dahingegen scheint die mechanische Bearbeitung das Sublimationsverhalten der Naphthalin-Schicht zu beeinflussen. Denkbar ist, dass während der Spanabnahme ein kurzzeitiges, lokal begrenztes Aufschmelzen des Naphthalins erfolgt und sich dadurch die Gefügestruktur ändert. Da die Frässpuren von der Vorschubrichtung (\blacktriangle , \blacktriangledown) abzuhängen scheinen, dürfte die Drehachse des Fräasers nicht ideal senkrecht zur Kanalwand stehen. Die Schneiden des Fräasers werden daher je nach Vorschubrichtung stärker schieben oder ziehen und ein unterschiedlich starkes Aufschmelzen der Schicht bedingen. Vor diesem Hintergrund ist auch die Verteilung der Steigung der linearen Regression dSh/dt bei der Vermessung nahe eines Dralllochs Abb. 5.5 deutbar. Die Naphthalin-Schicht wird vor jedem Versuch mit einem halbkugelförmigen Fräser mechanisch bearbeitet. Dieser erzeugt in einem Zug die Endgestalt der Schicht. Die Drehachse des Fräasers ist bei der Bearbeitung so ausgerichtet, dass mit kleiner werdender Koordinate α die Schnittgeschwindigkeit ansteigt. Im Bereich kleiner Werte von α dürfte daher die Aufschmelzung und somit auch der Einfluss auf das Sublimationsverhalten am stärksten sein. Die mit sinkendem α ansteigenden Werte von dSh/dt in Abb. 5.5 sind folglich auf das mechanische Bearbeiten der Naphthalin-Schicht zurückführbar.

Fazit Grundsätzlich ist die schlechte Reproduzierbarkeit bei der NSM auch bei der Untersuchung der Prallkühlung festzustellen. Anders als bei den Doppelproben-Sublimations-Experimenten wirkt sich die mechanische Bearbeitung der Schicht deutlich negativ auf die Reproduzierbarkeit aus. Generell ist die quantitative Aussagekraft der Messergebnisse genauso wie bei der Vermessung nahe eines Dralllochs inakzeptabel.

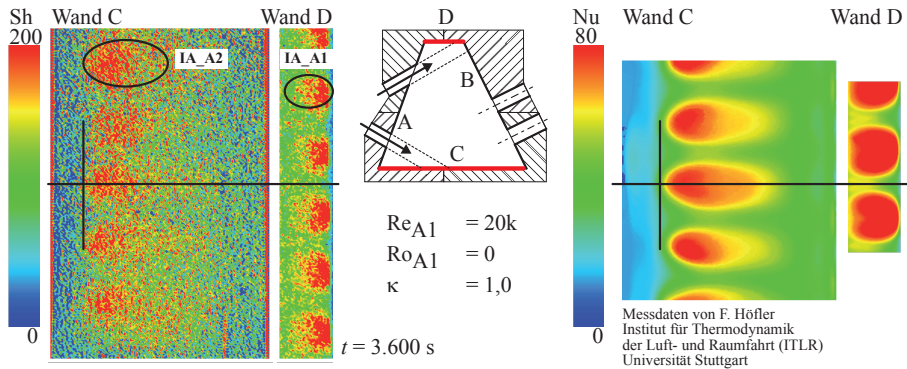


Abbildung 5.22.: Vergleich der Verteilung von Sherwood-Zahl Sh und Nusselt-Zahl Nu . Die experimentell ermittelten Daten zur Nusselt-Zahl-Verteilung wurden dem Autor von Herrn Höfler (ITLR, Universität Stuttgart) zur Verfügung gestellt

Prinzipielle Verteilung der Sherwood-Zahl

Die Verteilung der Sherwood-Zahl Sh auf den Kanalwänden ist mit Ausnahme lokal begrenzter Bereiche sehr homogen, wie aus der repräsentativen Darstellung Abb. 5.22 für die Wand C und Wand D zu entnehmen ist. Im Folgenden werden die Bereiche mit vergleichsweise hohen Werten von Sh als Auftreffgebiete bezeichnet und mit IA_A1 und IA_A2 für *Impingement Area* abgekürzt. Obwohl die experimentell bestimmte Sherwood-Zahl keine akzeptable Aussagequalität besitzt, werden im Weiteren deren Werte angegeben. Auf eine Relativierung von Sh pro Messung, beispielsweise durch den Maximalwert von Sh_{IA_A2} im Bereich der Auftreffgebiete, wird bewusst verzichtet. Bei dem vorliegenden starken räumlichen Rauschen der Sherwood-Zahl-Verteilung würde dieses Vorgehen eine Mittelung erfordern und diese wiederum die Kontur von Sh/Sh_{IA_A2} ungewollt verzerren.

Vergleich der Sherwood-Zahl mit der Nusselt-Zahl

Alle Messungen zur Bestimmung der Nusselt-Zahl mittels thermochromen Flüssigkristallen (TLC) wurden vom Institut für Thermodynamik in der Luft- und Raumfahrt (ITLR) der Universität Stuttgart durchgeführt und die gewonnenen Daten dem Autor zur Verfügung gestellt. Weitere Informationen zu diesen Messungen finden sich in [89] und [90].

Die Nusselt-Zahl-Verteilung Nu zeigt ähnliche Auftreffgebiete in annähernd gleicher Ausdehnung und an nahezu identischer Position wie die Sherwood-Zahl-Verteilung. Das Verhältnis von Sh im Bereich der Auftreffgebiete $Sh_{IA_A2} \approx 200$ auf Wand C zum Minimalwert $Sh \approx 50$ auf selbiger Wand ist etwa 4 und damit fast identisch zum Verhältnis der Nusselt-Zahlen an den entsprechenden Orten. Die qualitative Übereinstimmung von Sh und Nu ist damit als ausreichend zu bewerten.

Ungeachtet der Tatsache, dass die experimentell bestimmten Werte der Sherwood-Zahlen aufgrund der hohen relativen Abweichung nicht aussagekräftig sind, wird im Folgenden diskutiert, welche Konsequenz eine Korrelationsbildung hätte, würde den Messwerten bei bestimmten Messdauern Glauben geschenkt. Verwendet werden die in Tab. 5.2 angegebenen Werte für Sh und Nu in den Auftreffgebieten IA_A2 bei verschiedenen Reynolds-Zahlen und Messdauern. Sie sind den Messergebnissen direkt entnommen oder durch Extrapolation mit der Geradensteigung von etwa $dSh/dt \approx -0,18 \text{ 1/s}$ errechnet. Diese Steigung ist aus den Wiederholungsmessungen für den Bereich IA_A2 bei $Re_{A1} = 37k$ bekannt und wird auch für Messungen mit kleinerer Reynolds-Zahl als grober Anhaltswert übernommen. Da die Nusselt- und die Sherwood-Zahl nur für eine identische Parameterkonstellation ($Re_{A1} = 20k$) vermessen sind, werden die Werte für Nu bei $Re_{A1} = 35k$ und $Re_{A1} = 45k$ auf $Re_{A1} = 37k$ linear interpoliert.

Re_{A1}	20k	35k	37k	45k
Nu_{IA_A2}	80	120 \Rightarrow	123 (interpoliert)	\Leftarrow 135
Sh_{IA_A2}	200 ($t = 3.600 \text{ s}$)		100 ($t = 3.600 \text{ s}$)	
Sh_{IA_A2}	650 (extrapoliert $t = 0 \text{ s}$)		750 (extrapoliert $t = 0 \text{ s}$)	
Sh_{IA_A2}/Nu_{IA_A2}	2,5 (extrapoliert $t = 0 \text{ s}$)		0,8 (extrapoliert $t = 0 \text{ s}$)	
Sh_{IA_A2}/Nu_{IA_A2}	8,1 (extrapoliert $t = 0 \text{ s}$)		6,1 (extrapoliert $t = 0 \text{ s}$)	

Tabelle 5.2.: Sherwood- und Nusselt-Zahlen im Bereich der Auftreffgebiete auf Wand C bei verschiedenen Reynolds-Zahlen und unterschiedlichen Messdauern ohne Systemrotation

Wie Tab. 5.2 zu entnehmen ist, ergeben sich je nach Messdauer und Reynolds-Zahl unterschiedliche Verhältnisse von Sh_{IA_A2}/Nu_{IA_A2} . Zur Übertragung von Wärme- und Stofftransport würden sich daher verschiedene explizite Transferfunktionen f_T (siehe Gl. 4.110) ergeben, abhängig davon, welche Sherwood-Zahl als korrekt angesehen wird. Der Exponent n der Reynolds-Zahl in diesen Transferfunktionen wäre unterschiedlich und läge im Bereich $n \hat{=} \log_{37k/20k}(8,1/6,1) \approx 0,5 \dots \log_{37k/20k}(2,5/0,8) \approx 1,9$, also immer ungleich Null. Damit besäßen Korrelationen der Form Gl. 5.8, Gl. 5.9 immer unterschiedliche Exponenten q , p . Eine Korrelation für den Stoffübergang würde daher nie für den Wärmeübergang gelten und umgekehrt, sofern diese auf den in Tab. 5.2 angegebenen Daten basieren.

$$Sh \equiv A \cdot Re^q \quad (5.8) \qquad Nu \equiv B \cdot Re^p \quad (5.9) \qquad n = q - p \quad (5.10)$$

Fazit Die NSM liefert eine Sherwood-Zahl-Verteilung, die qualitativ mit der Verteilung der Nusselt-Zahl übereinstimmt. Quantitativ ist das Niveau der Sherwood-Zahl jedoch so stark von der schlechten Reproduzierbarkeit beeinflusst. Für Korrelationen zum Stofftransport bei der Prallkühlung, die auf den Wärmeübergang übertragbar sein sollen, sind Messdaten, die mit der NSM gewonnen werden, keine verlässliche Basis.

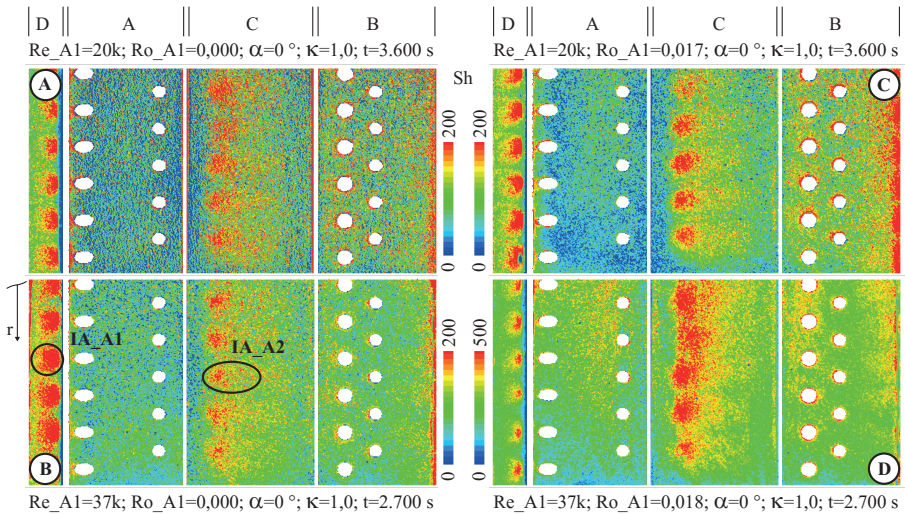


Abbildung 5.23.: Verteilung Sh bei zwei verschiedenen Re jeweils mit und ohne Rotation

Die Ergebnisse der NSM werden daher im Folgenden nur qualitativ interpretiert. Dabei wird an der Strukturänderung der Sherwood-Zahl-Verteilung der jeweilige Prameterinfluss identifiziert. Vor allem die Lage und Form der Auftreffgebiete IA_A1 und IA_A2 werden als Indikatoren herangezogen. Das inhomogene Sublimationsverhalten der Naphthalin-Schicht hat jedoch auch bei diesem Vorgehen noch einen Einfluss, der die Unsicherheit der Interpretationsaussagen erhöht. Beispielsweise wird die Größe der Auftreffgebiete je nach Messdauer, lokalem Sublimationsverhalten und Darstellungsskalierung anders ausfallen. Aus diesem Grund wird auf eine sehr aufwändige algorithmus-basierte Interpretation verzichtet und eine rein visuelle Deutung der Ergebnisse vorgenommen.

Einfluss der Reynolds-Zahl ohne Systemrotation

Der qualitative Verlauf der Sherwood-Zahl ändert sich nicht signifikant mit der Reynolds-Zahl im variierten Bereich von $Re_{A1} = 10k$ bis $Re_{A1} = 40k$, sofern keine Systemrotation vorliegt $Ro_{A1} = 0$. Wie unter (A) und (B) in Abb. 5.23 zu erkennen ist, sind die Auftreffgebiete IA_A1 und IA_A2 bei $Re_{A1} = 20k$ und $Re_{A1} = 37k$ in Form, Größe und Lage als identisch ansehbar. Die lokal erhöht scheinende Sherwood-Zahl im Bereich IA_A1 bei größerer Reynolds-Zahl liegt im Rahmen der Unsicherheit.

Einfluss der Reynolds-Zahl mit Systemrotation

Eine Änderung der Reynolds-Zahl bei einem Anstellwinkel von $\alpha = 0^\circ$ und gleicher Rotationszahl $Ro_{A1} \approx 0,0017$ bewirkt keine erkennbaren Unterschiede in der

Sh -Verteilung, wie durch den Vergleich von ③ und ④ in Abb. 5.23 zu erkennen ist. Zu berücksichtigen ist dabei, dass die augenscheinliche Reduktion von Sh mit der radialen Länge r in ④ nicht durch einen veränderten Stoffübergang hervorgerufen wird. Vielmehr führen Zentrifugalkräfte zu einer plastischen Verwölbung des Trägersubstrats (Segmente des Kanalmodells) und verfälschen so die Schichtdickenmessung. Diese Deformation lässt sich mit der hier verwendeten Lagekorrektur nicht herausrechnen (siehe Kap. 3.1.5).

Einfluss der Systemrotation

Zwischen den Fällen mit und ohne Systemrotation unterscheidet sich die Struktur der Sherwood-Zahl-Verteilung, wie Abb. 5.23 und Abb. 5.24 zeigen. Die Rotation beeinflusst die Lage und Form der Auftreffgebiete IA. Im Fall ohne Systemrotation (① und ② in Abb. 5.23 und ⑤ in Abb. 5.24) sind Auftreffgebiete Ovale mit einer Symmetrieachse. Diese fluchtet zu den Achsen der Bohrungen A1 und A2. Liegt Systemrotation vor, wie in ③, ④ und ⑥ von Abb. 5.24, so versetzen sich die Auftreffgebiete in radialer Richtung r und kippen um einen bestimmten Winkel zur Bohrungsachse. Der radiale Versatz ist durch die Kennzeichnung des Mittelpunktes der Auftreffgebiete mit + leicht zu erkennen. Die Kippung und Verschiebung des jeweiligen ovalen Gebietes hängt maßgeblich vom Anstellwinkel α ab. Größere Kippwinkel als 50° treten bei den hier variierten Parametern nicht auf. Pro Parameterkonfiguration verändert sich die Kipprichtung der Auftreffgebiete über die radiale Koordinate r nicht. Der Wert des Kippwinkels schwankt aus subjektiver Sicht aber durchaus (siehe ③ in Abb. 5.24) wobei keine eindeutige Abhängigkeit von der Ortskoordinate r feststellbar ist. Eine mögliche Formänderung der Auftreffgebiete lässt sich aufgrund des flächigen Rau-schens nicht erkennen.

Einfluss der Art der Massenabfuhr

Die Struktur der Sherwood-Zahl-Verteilung wird durch einen höheren Anteil an Massenabfuhr durch den radial außen liegenden Deckel ($\kappa < 1,0$) verzerrt (siehe Abb. 5.25). Für den Fall ohne Systemrotation mit vollständig radialer Massenabfuhr $\kappa = 0$ verkippen und verschieben sich die Auftreffgebiete IA_A2, wie aus dem Vergleich von ① und ⑥ in Abb. 5.25 zu erkennen ist. Der Kippwinkel sowie die radiale Verschiebung werden größer, je näher das Auftreffgebiet am radialen Auslass liegt. Die Massenabfuhr $\kappa = 0$ wirkt also wie eine radial zunehmende Systemrotation. Zudem verlagert sich der Auftreffmittelpunkt + auch senkrecht zur radialen Ortskoordinate r . Diese Verlagerung nimmt ebenfalls mit Annäherung an den radialen Auslass zu. Unter Systemrotation superponieren sich die Verkippungen sowie Verschiebungen bedingt durch Rotation und radiale Massenabfuhr. Wie aus ① von Abb. 5.25 entnommen werden kann, sind die Kippwinkel von IA_A2 deutlich größer als Null. Im Falle von $\kappa = 1$ aber bei sonst ähnlichen Bedingungen sind die betreffenden Winkel negativ aber vom Betrag in etwa gleicher Größe (siehe ① in Abb. 5.25). Im gesamten hier untersuchten Parameterbereich hat die vollständig radiale Massenabfuhr eine stärkere Wirkung als die Systemrotation.

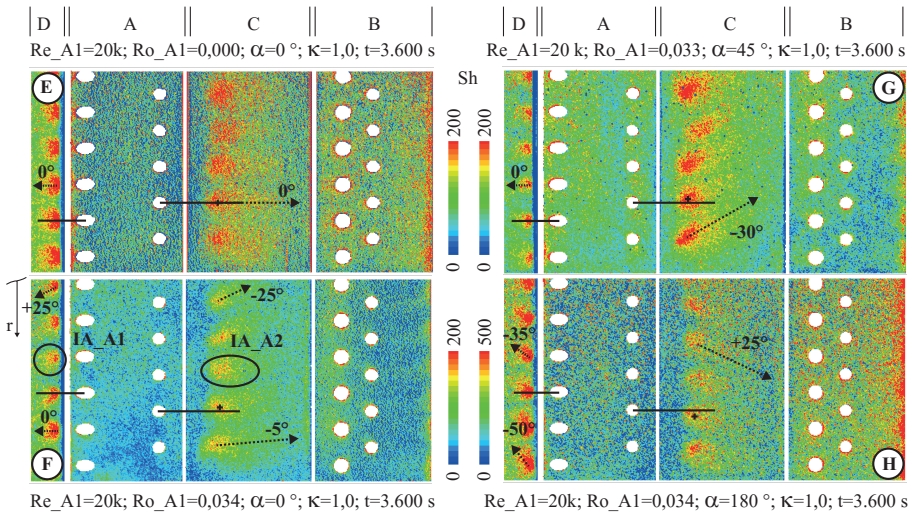


Abbildung 5.24.: Einfluss der Systemrotation auf die Verteilung Sh

Fazit

Die mittels NSM bestimmten Sherwood-Zahlen ergeben keine quantitativ verlässliche Aussage. Ein Einfluss der Systemrotation und der Art der Massenabfuhr kann jedoch anhand der Verläufe der Sherwood-Zahl auf den Kanalwänden qualitativ identifiziert werden. Sowohl die Art der Massenabfuhr als auch die Systemrotation bewirken ein Verkippen und Versetzen der Auftreffgebiete.

5.2.2. Strömung der Prallkühlung

Die Strömung der Prallkühlung wird bei einer Reynolds-Zahl von $Re_{A1} = 20k$ und $\kappa = 1$ mittels MRV, wie in Kap. 3.1.7 beschrieben, vermessen. In Abb. 5.26 sind die Grundzüge der Strömung durch Isoflächen und Konturschnitte der Strömungsgeschwindigkeitsmagnitude innerhalb des gesamten MRV-Kanalmodells dargestellt. Charakteristisch sind die aus Bohrung A1 und A2 austretenden Freistrahlen. Letztgenannte sind mit \textcircled{F} gekennzeichnet. Ihre Form und Ausdehnung bleibt bis zum Auftreffen auf die entsprechenden Wände nahezu konstant. Dieses Merkmal der Prallkühlung ist auch in [91] für ein Kanalsegment mit sieben Bohrungen pro Reihe experimentell wie numerisch identifiziert worden. Der Einfluss der radial begrenzenden Wände (Boden und Deckel) scheint damit keine Auswirkungen auf die Freistrahlen zu haben. Sie könnten jedoch die maßgebende Ursache sein für die nicht dargestellte stark verwirbelte Strömung, die die Freistrahlen umgibt. Da die radial begrenzenden Wände im Kanalmodell für die Stoffübergangsuntersuchungen deutlich weiter voneinander entfernt sind und damit einen anderen Einfluss auf die Strömung haben dürften, wird nur das Gebiet der Freistrahlen als übertragbar angesehen.

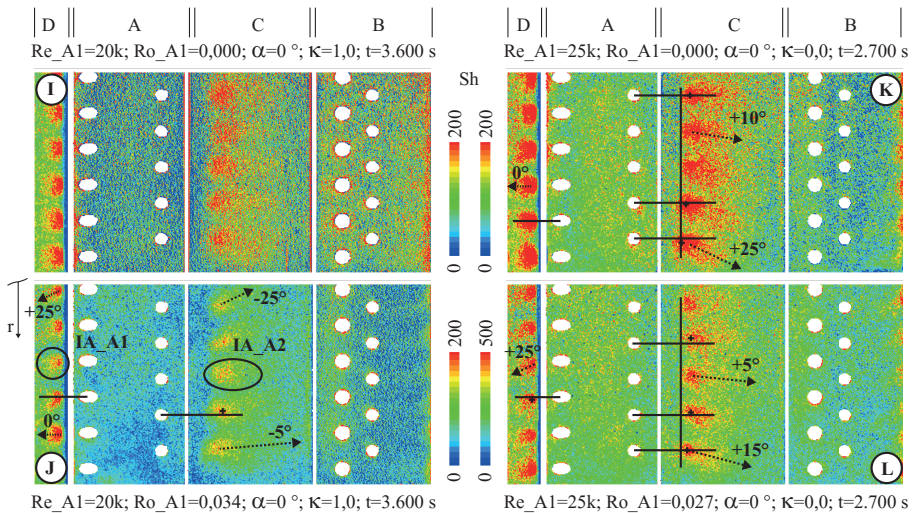


Abbildung 5.25.: Einfluss der Art der Massenabfuhr mit und ohne Systemrotation

Die eindimensionalen Geschwindigkeitsprofile u_{FS} des Freistrahls aus einer der Bohrungen A2 ist in Abb. 5.27 an verschiedenen Lauflängenpositionen des Strahls über dessen Querkoordinate x/d_{A1} dargestellt. Das Profil ähnelt einer Gauß'schen Verteilung, wie sie sich gemäß der Freistrah-Theorie einstellt. Diese Verteilung wird jedoch erst nach einer Lauflänge von etwa einem halben Bohrungsdurchmesser erreicht. Bis dort schnürt sich der Freistrah etwas ein und nimmt ihn umgebendes Fluid auf (grüne Linien im Diagramm $u_{FS}(x/d_{A1})$ in Abb. 5.27). Die maximale Geschwindigkeit des Freistrahls $u_{FS,max}$ bleibt über die Lauflänge fast konstant (blaue Linien im Diagramm $u_{FS}(x/d_{A1})$ in Abb. 5.27). Bei der Interpretation ist zu berücksichtigen, dass aufgrund der gewählten maximal aufzulösenden Geschwindigkeit von $V_{ENC} = 5$ m/s wahrscheinlich eine Faltung der hohen Geschwindigkeitswerte eintritt. Diese Faltung ist rechnerisch korrigierbar, wenn die tatsächliche lokale Strömungsgeschwindigkeit tendenziell abschätzbar ist. Ein lokales Minimum der Geschwindigkeit, wie es bei $x/d_{A1} = 0$ vorzuliegen scheint, ist physikalisch unlogisch. So ist anzunehmen, dass die tatsächliche Geschwindigkeit im Kern des Freistrahls $u_{FS,max}$ bei zirka 5,5 m/s liegt (blaue gestrichelte Linie im Diagramm $u_{FS}(x/d_{A1})$ in Abb. 5.27). In einem Abstand von etwa einem Bohrungsdurchmesser vor dem Auftreffen auf die Wand verändert der Freistrah seine Gestalt und Geschwindigkeitsverteilung (rote Linie im Diagramm $u_{FS}(x/d_{A1})$ in Abb. 5.27). Die Kerngeschwindigkeit verringert sich um etwa 30% $u_{FS,max}$ und die Breite des Freistrahls erstreckt sich über etwa die doppelte Breite in Richtung x/d_{A1} . Prinzipiell trifft dieses Verhalten auf alle Freistrahlen aus den Bohrungen A1 und A2 zu.

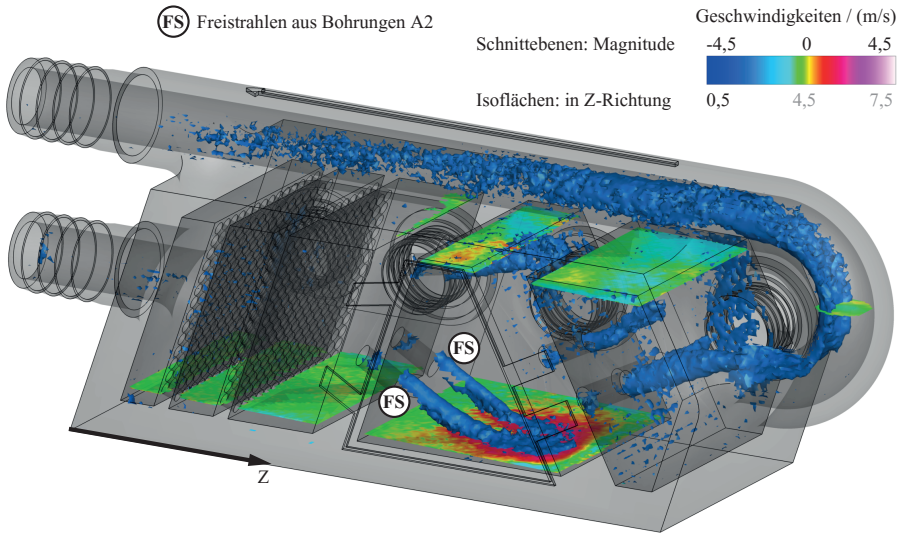


Abbildung 5.26.: Mit MRV bestimmte Strömung im Segment der Prallkühlung

Fazit Die Strömung der Prallkühlung zeigt abgrenzbare Freistrahlen auf. Diese lassen sich nicht merklich durch die sie umgebende Strömung beeinflussen, sofern die Massenabfuhr durch die Bohrungen der Reihen B1 und B2 erfolgt. Das Geschwindigkeitsprofil der Freistrahlen entspricht über einen Großteil der Lauflänge einer Verteilung nach Gauß.

5.2.3. Analytisches Modell der Freistrahlskrümmung

Die im Stoffübergang zu beobachtenden Auftreffgebiete dürften überwiegend durch das Verhalten der Freistrahlen bedingt sein. Der Einfluss der Strömung außerhalb der Strahlen scheint nur einen indirekten Einfluss zu haben und auch nur, wenn die Massenabfuhr durch die radial äußere Bohrung erfolgt. Dann überlagert sich den Freistrahlen eine Querströmung und krümmt diese konvektiv. Die Auftreffgebiete sind dann verschoben und entsprechend gekippt. Dieses Verhalten ist aufgrund der sehr inhomogenen Querströmung analytisch nur schwer vorherzusagen. Für den Fall einer vollständigen Massenabfuhr durch die Bohrungen B1 und B2 ($\kappa = 1$) allerdings ist in Summe keine Querströmung vorhanden. Die Verkipfung und Verschiebung der Auftreffgebiete muss daher primär eine Folge der Systemrotation sein. Mit diesen Erkenntnissen wird im Folgenden ein analytisches Modell zum Rotationseinfluss auf Prallstrahlen entwickelt. Dieses sagt die Kontur der Auftreffgebiete allein aus geometrischen und kinetischen Randbedingungen vorher. Zunächst werden der Aufbau und die Einschränkungen des Modells erläutert. Die Validität des Modells wird anschließend anhand des Vergleichs von dessen Vorhersagen mit den Ergebnissen der Stoffübergangsmessungen aufgezeigt. Abschließend erfolgt eine Anwendung des Modells

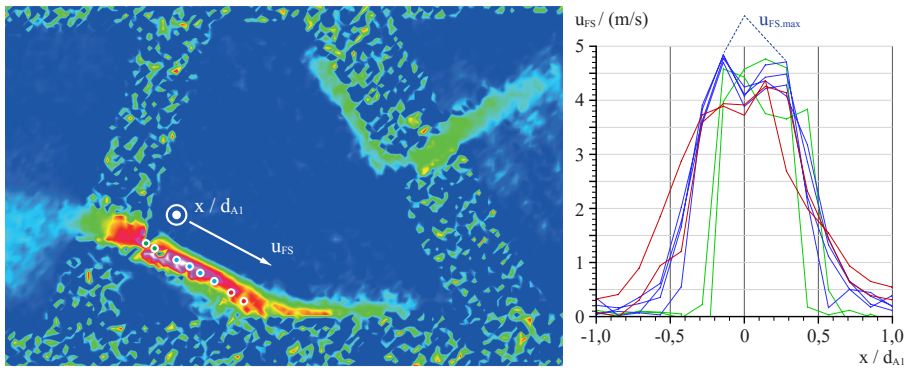


Abbildung 5.27.: Geschwindigkeitsprofil des Freistrahls aus Bohrung A2 an verschiedenen Lauflängenpositionen

auf die Bedingungen einer Turbinenkühlung, um den Einfluss der Systemrotation auf diese zu verdeutlichen.

Aufbau und Einschränkungen des Modells

Grundlegend wird für das Modell ein Freistrahls aus nicht viskosem Fluid postuliert. Ebenso wird angenommen, dass die Stromfäden des Strahls nicht wechselwirken können. Sie sind daher in der Lage, sich ohne gegenseitige Beeinflussung zu durchdringen. Streng genommen ist dieses Verhalten nur dann und auch nur näherungsweise erfüllt, wenn das Fluid ein sehr dünnes Gas¹² ist oder die Stromfadeninteraktion keine Positionsänderung herbeiführt, sondern sich nur auf die Massendichte auswirkt. Bei der Strömung des Prallkühlkanals ist beides nicht gegeben. Allerdings müssen diese Diskrepanzen die Aussagefähigkeit des Modells nicht zwangsläufig beeinträchtigen, wie die spätere Validierung zeigt. Die Geschwindigkeitsverteilung $u(y, z) \hat{=} u(r)$ über den Freistrahlsquerschnitt wird als beliebig aber symmetrisch um die Strahlachse angenommen. Aufgrund der Reibungsfreiheit wird postuliert, dass sich die Geschwindigkeit u entlang jedes Stromfadens des Freistrahls nicht verändert. Ein so definierter Freistrahls erfährt im rotierenden Relativsystem die beiden Scheinwirkungen, Zentrifugal- und Coriolis-Wirkung (siehe Kap. 4.1.5). Sind Auftriebseffekte und die Pumpwirkung für den Bereich des Freistrahls vernachlässigbar, was hier als gegeben angesehen wird, so hat die Zentrifugalwirkung keinen Einfluss auf die Stromlinien des Strahls. Sie bewirkt nur eine Änderung im statischen Druckfeld, also eine lokale Verteilung der thermischen Zustandsgrößen. Dieser Anteil am Druckfeld wechselwirkt jedoch nicht mit dem Geschwindigkeitsfeld. Allein die Coriolis-Wirkung Gl. 5.11 stellt den Rotations-

¹²Die mittlere freie Weglänge der Teilchen ist dann wesentlich größer als die Abmessungen des Strömungsvolumens (sehr große Knudsen-Zahlen $Kn \gg 1$).

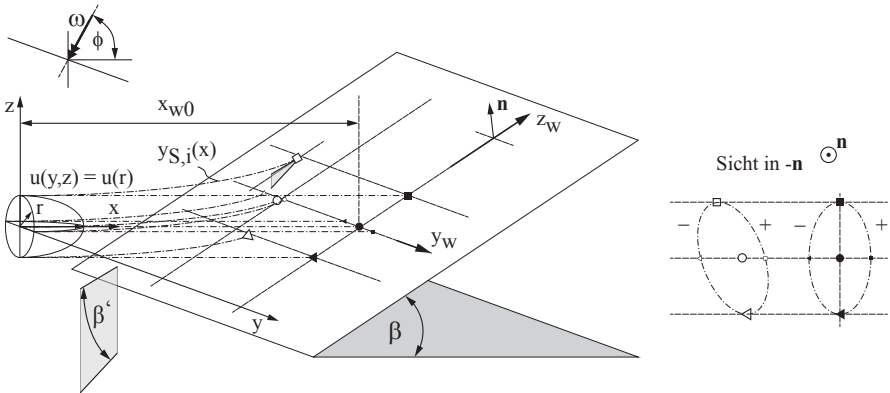


Abbildung 5.28.: Prinzipielles Ergebnis des Modells zur Freistrahlskrümmung bei quadratischem Geschwindigkeitsprofil

einfluss auf den Freistrahldar.

$$\begin{aligned} \text{äquivalent zu Gl. 4.50} \quad \vec{f}_c &= -2 \vec{\omega} \times \vec{u} \Rightarrow f_c \hat{=} -2 \omega u \sin(\phi) \\ &\forall \vec{u} \wedge \vec{\omega} \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Unter diesen Bedingungen ist auch die Verwendung nur einer Rotationszahl Ro_{A1} anstatt von dreien Ro_x , Ro_{x_0} , Ro_{y_0} , also ohne die Rücksicht auf eine korrekte Skalierung der Zentrifugalkräfte, ausreichend, um eine Strömung zu charakterisieren. Auch die nicht korrekte Wahl der charakteristischen Länge, zum Beispiel zum hydraulischen Durchmesser einer Freistrahlsbohrung wie in dieser Arbeit, verzerrt dann zwar den Wert der Rotationszahl, wirkt sich aber trotzdem nicht verfälschend auf die Strömungscharakterisierung aus. Hierzu müsste die Zentrifugalwirkung einen Einfluss auf das Geschwindigkeitsfeld haben. Die Einschränkungen des Modells sind also konsistent zu den Bedingungen, die erfüllt werden müssen, damit die in dieser Arbeit definierte Rotationszahl der Prallkühlung (Gl. 5.7) eine charakteristische Kennzahl darstellt.

Die algebraische Herleitung des Modells auf Basis der hier genannten Annahmen findet sich in Anh. S. An dieser Stelle sei nur das Resultat der Herleitung erläutert. Die Abb. 5.28 zeigt beispielhaft ein explizites Ergebnis des Modells für den Fall ohne Systemrotation ($\blacktriangleleft, \bullet, \blacksquare$) und mit Systemrotation ($\blacktriangleleft, \circ, \square$). Auf jedem Stromfaden des Freistrahls tritt ein Fluidelement mit einer bestimmten Geschwindigkeit u an einer bestimmten Position y, z der Bohrung (Koordinatenursprung) aus dieser aus. Diese jeweilige Austrittsgeschwindigkeit behält das Fluidelement bis zum Auftreffen auf die Prallwand unverändert bei. Sofern keine Systemrotation vorliegt, $\omega = 0$, ist der Stromfaden eine Gerade. Die sich einstellende Auftreffkontur ist eine Projektion der Freistrahlsbohrung auf der Prallwand und unabhängig vom Geschwindigkeitsprofil des Freistrahls $u(y, z)$. Liegt jedoch eine Systemrotation vor, $\omega \neq 0$, so erfährt jedes Fluid-

element aufgrund der Coriolis-Wirkung Gl. 5.11 eine Beschleunigung f_c in y -Richtung. Diese hängt ebenso von der Geschwindigkeit u ab, wie die Zeit, die das Fluidelement vom Bohrungsaustritt bis zur Prallwand benötigt. Die Krümmung jedes Stromfadens wird also durch dessen Geschwindigkeit u , dessen Erstreckung zur Prallwand in x -Richtung und der Drehkreisfrequenz ω bestimmt. Da eine gegenseitige Beeinflussung der Stromfäden per Definition ausgeschlossen ist, ergibt sich die Auftreffkontur direkt aus den einzelnen Auftreffpunkten der Stromfäden zu Gl. 5.12. Hierbei ist y_S der in Wandkoordinaten formulierte Auftreffpunkt des Stromfadens, der am Ort r (nach Gl. 5.13) aus der Bohrung austritt. Die Geschwindigkeitsverteilung $u(r)$ ist jene, die im Bohrungsaustritt für den Freistrahls vorgegeben werden muss. Die Variable r ist hierbei die Radialkoordinate des Freistrahls. Der projizierte Abstand von Bohrungsmitte bis zur Prallwand, genannt Mittenabstand x_{w0} , ist ebenfalls eine vorzugebende Größe, genauso wie der Neigungswinkel der Prallwand, genannt Wandneigungswinkel β und die Drehkreisfrequenz ω . Eine Unterscheidung mittels \pm in Gl. 5.12 ist algebraisch zur Berechnung der jeweiligen Hälfte der Auftreffkontur notwendig (siehe Abb. 5.28). Die Transformation der Koordinaten erfolgt nach Gl. 5.13 und ist hier nur zum besseren Verständnis angegeben.

$$y_S(z_w, r, x_{w0}, \beta, \phi, \omega) = \frac{\omega \cdot \sin(\phi)}{u(r)} (x_{w0} + z_w \cdot \cos(\beta))^2 \pm \sqrt{r^2 - (z_w \cdot \sin(\beta))^2} \quad (5.12)$$

$$y = y_w \quad \wedge \quad z = z_w \cdot \sin(\beta) \quad \wedge \quad r = \sqrt{y^2 + z^2} = \sqrt{y_w^2 + (z_w \cdot \sin(\beta))^2} \quad (5.13)$$

Validierung des Modells

Zur Validierung des Modells der Freistrahlskrümmung werden zwei Fälle mit verschiedenen Geschwindigkeitsprofilen $u(r)$ angenommen. Eine homogene Verteilung der Geschwindigkeit, genannt Blockprofil (Index $_{BP}$), dient als Referenzfall. Im zweiten Fall wird eine paraboloides Geschwindigkeitsverteilung (Index $_{PP}$) mit gleichem Massenstrom wie das Blockprofil angenommen. Der Maximalwert der Geschwindigkeit dieses Profils ist daher genau doppelt so groß wie die Geschwindigkeit des Blockprofils $u_{PP,max} = 2 \cdot u_{BP}$. Nachfolgend wird es als Parabelprofil bezeichnet. Es kommt dem gemessenen, einer Gauß'schen Verteilung ähnelndem Geschwindigkeitsprofil sehr nahe und ist damit repräsentativ für die Prallkühlung.

Weiterhin werden explizite Werte für Parabel- und Blockprofil sowie Wandneigungswinkel und Mittenabstand aus den Bedingungen des Prallkühlkanals bei Stoffübergangsmessungen herangezogen. Repräsentativ wird der Prallstrahl aus der Bohrung A2 bei $Re_{A2} = 20k$, $\omega = 0$ 1/s und $\omega = 50$ 1/s sowie $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha = 45^\circ$ verwendet. Die vom Modell vorhergesagten Auftreffkonturen für den Fall $\alpha = 0^\circ$ sind in Abb. 5.29 dargestellt. Ohne Systemrotation $\omega = 0$ 1/s sind die Auftreffkonturen eine Projektion der kreisrunden Freistrahlsbohrung und für jedes Geschwindigkeitsprofil identisch (dünne Linien). Der Mittelpunkt der Kontur (x) befindet sich auf

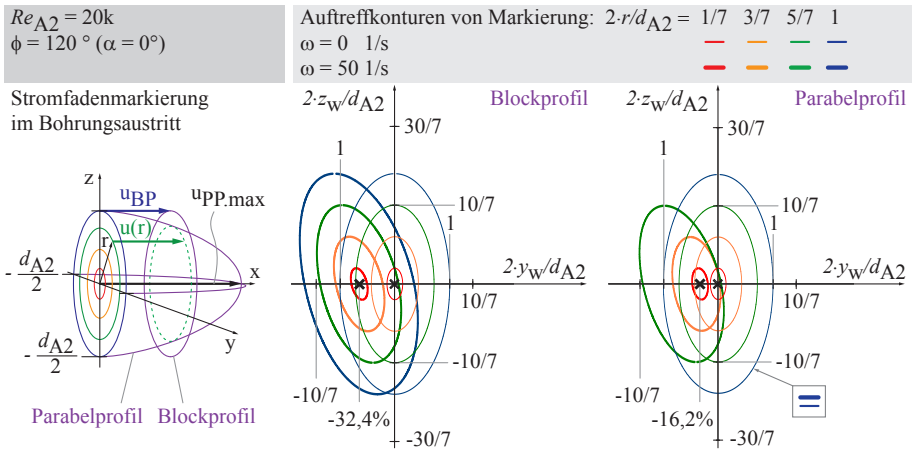


Abbildung 5.29.: Ergebnis des Modells zur Freistrahlskrümmung bei Blockprofil und Parabelprofil unter repräsentativen Bedingungen des Prallkühlkanals

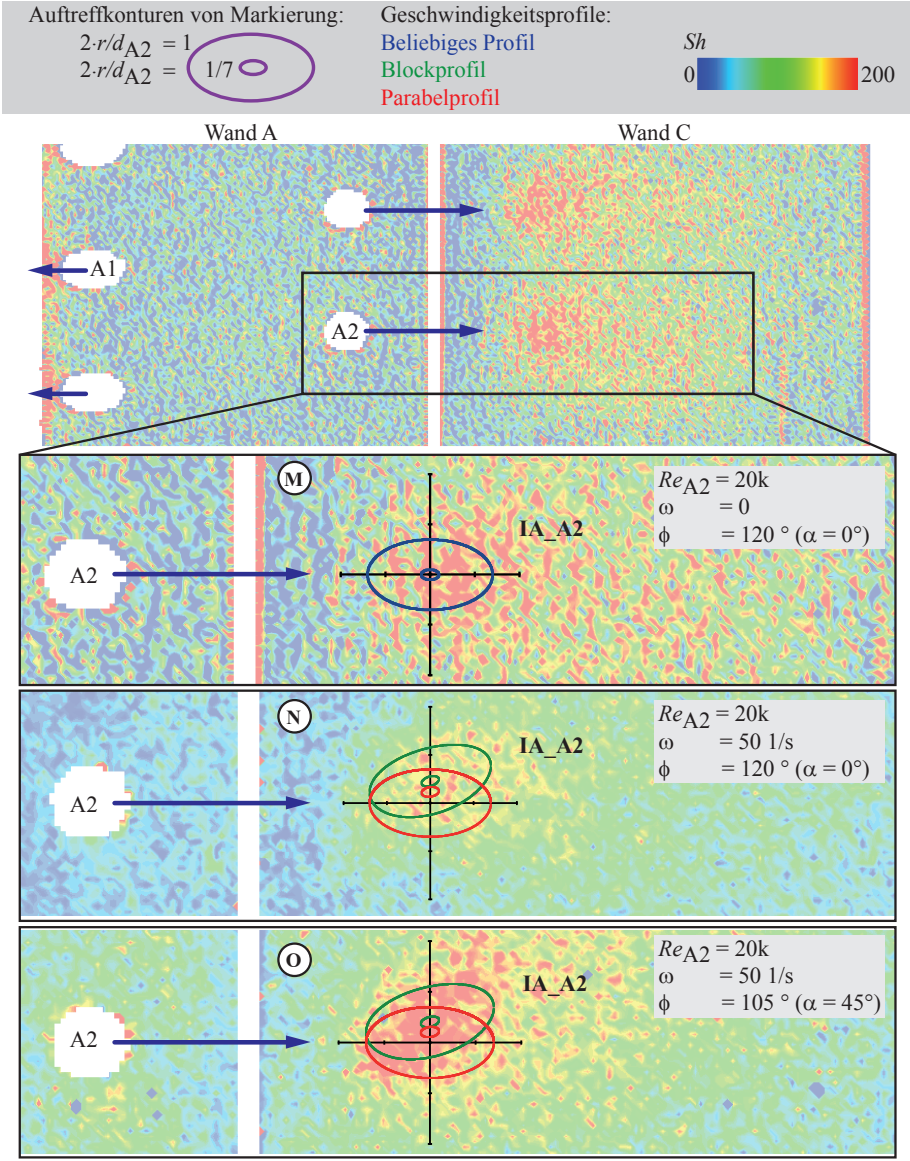
der Bohrungslängsachse x . Mit Systemrotation $\omega = 50 \text{ 1/s}$ ergibt das Blockprofil eine verzogene Projektion der kreisrunden Freistrahlsbohrung als Auftreffkontur (dicke Linien). Der Konturmittelpunkt (x) liegt in negative y_W -Richtung versetzt. Beim Parabelprofil fällt die Verzerrung der Auftreffkontur stärker aus als beim Blockprofil. Die Verschiebung des Konturmittelpunkts (x) in negative y_W -Richtung ist jedoch geringer. Sie ist mit $2 \cdot y_W = -16,2\% \cdot d_{A2}$ genau halb so groß wie jene beim Blockprofil mit $2 \cdot y_W = -32,4\% \cdot d_{A2}$. Ursache hierfür ist die doppelte Kerngeschwindigkeit des Strahls. Bei einer Radiuskoordinate der Bohrung von $r = 5/14 \cdot d_{A2}$ (grüne Linien) ist die Geschwindigkeit des Parabelprofils identisch mit der des Blockprofils. Folglich entsprechen sich die Auftreffkonturen für diese Stromfäden in beiden Fällen. Da beim Parabelprofil die Geschwindigkeit am Freistrahlsrand zu Null gesetzt wird und daher auch keine Coriolis-Wirkung vorliegt, entspricht die Auftreffkontur des Strahls immer der des Falles ohne Systemrotation (die blauen Linien sind deckungsgleich).

Für diese Bedingungen sind die vom Modell vorhergesagten Auftreffkonturen in Abb. 5.30 maßstäblich mit den Auftreffgebieten IA_{A2} in Form der Sherwood-Zahl Sh dargestellt. Die blauen Konturen sind für den Fall ohne Systemrotation ($\omega = 0 \text{ 1/s}$) angegeben und damit unabhängig vom Geschwindigkeitsprofil und Anstellwinkel α . Markiert wurden die Stromfäden auf den Radiuskoordinaten $r = 1/2 \cdot d_{A2}$, also am Bohrungsrand, und $r = 1/14 \cdot d_{A2}$, also nahe dem Strahlkern. Die grünen Konturen folgen aus dem Blockprofil, sofern Systemrotation vorliegt. Die roten Konturen ergeben sich aus dem Parabelprofil, ebenfalls wenn das System rotiert. Für den Fall ohne Systemrotation (siehe ☺) stimmt die Auftreffkontur mit dem Auftreffgebiet ausgedrückt in Sh gut überein. Liegt Systemrotation vor (siehe ☹ und ☻), so weichen Auftreffkonturen und Auftreffgebiete voneinander ab, stimmen aber prinzipiell noch überein. Die Kontur des Blockprofils (grüne Linie) zeigt nur

geringe Abweichungen zum Auftreffgebiet. Das Parabelprofil (rote Linie) hingegen ist deutlich weniger stark verschoben und verkippt wie das Auftreffgebiet. Obwohl das gemessene Geschwindigkeitsprofil des Strahls eher dem Parabelprofil ähnelt als dem Blockprofil, liefert das Modell mit letzterem die deutlich bessere Übereinstimmung mit den gemessenen Sherwood-Zahl-Verteilungen. Ursache hierfür dürfte die im Modell fehlende Stromfadeninteraktion sein. Für die Nutzung des Modells sollte daher stets ein gedachtes Blockprofil mit der tatsächlichen mittleren Strömungsgeschwindigkeit des Strahls verwendet werden, auch wenn das wirklich vorliegende Profil eher einer Gauß'schen Verteilung ähnelt. Durch die fehlende Stromfadeninteraktion kann das Modell auch keine korrekten Schubspannungen vorhersagen. Die Form der Auftreffkonturen entsprechen daher nicht zwingend den Formen der Auftreffgebiete, die vorwiegend durch die Verteilungen der Geschwindigkeitsgradienten und damit auch der Schubspannungen geprägt werden. Unter der Annahme, dass die Freistrahlskrümmung keinen signifikanten Einfluss auf die Geschwindigkeitsgradienten nahe dem Auftreffgebiet hat, wird der Betrag des dortigen WS-Übergangs bei verschiedenen Verkipnungen annähernd identisch sein. Aufgrund der schlechten Reproduzierbarkeit der NSM lässt sich dieses jedoch hier nicht zeigen. In [92] wird allerdings für ähnliche Parameterkonstellationen ($Re = 23k \approx 20k = Re_{A2}$, $L/D = 2...7 \approx 2,85 = x_{w0}/d_{A2}$, $\phi = 60...90^\circ \approx 30^\circ = \beta$) gezeigt, dass sich der Maximalwert und die Verteilung der Nusselt-Zahl im Bereich des Auftreffgebiets ($R/D \leq 1$) in Abhängigkeit vom Auftreffwinkel ϕ und dem dimensionslosen Mittenabstand L/D signifikant verändert. Die Änderung der maximalen Nusselt-Zahl liegt bei einer Variation des Auftreffwinkels von $\Delta\phi = 45^\circ$ jedoch nur bei etwa $20\%_{\phi=90^\circ}$ (für $L/D = 7^{13}$). Bei Winkeländerungen von $\Delta\phi = 15^\circ$ ist keine Veränderung der Nusselt-Zahl feststellbar, weder in der Verteilung noch im Niveau. Nach [92] wird die Nusselt-Zahl-Verteilung mit kleinerem Mittenabstand zwar sensibler gegenüber Änderungen des Auftreffwinkels. Allerdings variiert der Maximalwert der Nusselt-Zahl nicht mehr als zirka 30%. Auch wenn bei der Prallkühlung etwas geringere dimensionslose Mittenabstände von $x_{w0}/d_{A2} = 2,85$ vorliegen, wird eine Veränderung des Auftreffwinkels von weniger als $\beta - \beta' < 15^\circ$ den WS-Übergang nur vernachlässigbar ändern. Der Auftreffwinkel eines Stromfadens bei Freistrahlskrümmung $\beta'(r, z, \phi)$ (siehe auch Abb. 5.28) lässt sich nach Gl. S.20 bestimmen. Beim hier betrachteten repräsentativen Prallstrahl verringert sich der Auftreffwinkel der einzelnen Stromfäden um maximal $\beta - \beta' = 25,03^\circ$. Dieser Maximalwert von $\beta' = 4,97^\circ$ ergibt sich jedoch nur für den Stromfaden des Parabelprofils, der nahe der Bohrungswand bei $z = 0,99 \cdot r$ aus der Bohrung austritt. Er ist extrem langsam und hat die längste Lauflänge. Seine Krümmung und die daraus resultierende Änderung des Auftreffwinkels sind folglich am größten. Alle Auftreffwinkel der Stromfäden des Blockprofils sowie der strahlkernnahen Stromfäden des Parabelprofils zeigen eine sehr geringe Winkeländerung von $\beta - \beta' < 1^\circ$. Daher dürften die Verteilungen des WS-Übergangskoeffizienten im Bereich des Auftreffgebietes nahezu identisch sein, unabhängig davon, ob Systemrotation vorliegt oder nicht.

¹³ Andere Konfigurationen werden nicht angegeben

Fazit Das Modell der Freistrahlskrümmung ist gut geeignet, um den Einfluss der Rotation auf die Form und die Lage der Auftreffgebiete bei einer Prallkühlung ohne radiale Massenabfuhr ($\kappa = 1$) vorherzusagen. Um den fehlenden Einfluss der Stromfadeninteraktion manipulativ auszugleichen, ist es gerechtfertigt, das Geschwindigkeitsprofil des Freistrahls rechnerisch in ein Blockprofil zu überführen. Hierbei ist der Volumenstrom konstant zu halten. Größere Änderungen im Wert des lokalen WS-Übergangs kann das Modell definitionsbedingt nicht vorhersagen. Auf Basis der Erkenntnisse aus [92] sind sie jedoch als vernachlässigbar gering zu erwarten.



Anwendung des Modells auf die Bedingungen einer Turbinenkühlung

Da das Modell zur Freistrahlskrümmung den Rotationseinfluss bei der generischen Prallkühlung adäquat vorhersagt, dürfte es auch für die Bedingungen einer technischen Anwendung, also der Prallkühlung in einer Turbine, brauchbare Ergebnisse liefern. Im Folgenden werden beispielhaft die Auftreffkonturen für denselben Freistrahlel ermittelt, wie er in Kap. 5.2.3 betrachtet wird. Allerdings entsprechen der Bohrungsdurchmesser d_{A2} sowie der Mittenabstand x_{w0} den Werten eines Prallkühlkanals in einer Turbinenschaufel, welche um den Faktor $1/SF \cong 1/7$ kleiner sind als jene Werte im Prallkühlexperiment. Die Drehkreisfrequenz ist ebenfalls der Anwendung angepasst und liegt bei $\omega = 314$ 1/s. Unverändert bleiben die Reynolds-Zahl $Re_{A2} = 20k$ sowie der Wandneigungswinkel $\beta = 30^\circ$. Betrachtet wird auch nur ein repräsentativer Anstellwinkel von $\alpha = 0^\circ$.

Die Auftreffkonturen in der technischen Anwendung sind in der rechten Hälfte von Abb. 5.31 veranschaulicht. In der linken Hälfte von Abb. 5.31 sind zum Vergleich die Auftreffkonturen bei entsprechenden Bedingungen des Experiments mit dargestellt. Markiert wurden die Stromfäden vom Block- als auch vom Parabelprofil bei einer Radiuskoordinate nahe dem Strahlkern bei $r = 1/14 \cdot d_{A2}$ (dicke Linien) und am Bohrungsrand bei $r = 1/2 \cdot d_{A2}$ (dünne Linien). Die Auftreffkonturen für das Parabelprofil sind nur der Vollständigkeit halber mit eingezeichnet. Aussagen werden aber nur aus den verlässlicheren Ergebnissen des Blockprofils gezogen. Es ist in Abb. 5.31 leicht zu erkennen, dass die Verschiebung und Verkipfung der Auftreffgebiete im Experiment deutlich größer sind als bei der Anwendung. Die Verschiebung in der Anwendung ist nicht größer als etwa $8,8\%_{d_{A2}/2}$ des Bohrungsradius. Der minimalste Auftreffwinkel (markiert bei $r = d_{A2}/2, y = 0$) ist mit $\beta' = 29,94^\circ$ nach Gl. S.20 nahezu identisch mit dem Wandneigungswinkel $\beta = 30^\circ$. Alle anderen Auftreffwinkel liegen zwischen diesen beiden Werten.

Fazit Eine signifikante Veränderung des Wärmeübergangs infolge der Rotation ist laut dem Modell bei der Prallkühlung in einer Turbinenschaufel nicht zu erwarten. Die Verkipfung, Verschiebung und Änderung des Auftreffwinkels sind zu gering. Allerdings gilt diese Aussage nur für eine reibungsfreie Strömungen mit wechselwirkungslosen Stromfäden bei der Auftriebseffekte und die Pumpwirkung vernachlässigbar klein sind. Für eine Strömung in einer Turbinenschaufel stimmen diese Annahmen bestenfalls nur näherungsweise. Ob das Modell der Freistrahlskrümmung den Rotationseinfluss bei den Bedingungen des Heißgas-Systems annehmbar vorhersagt, könnte nur durch direkte Untersuchungen bei diesen Bedingungen überprüft werden.

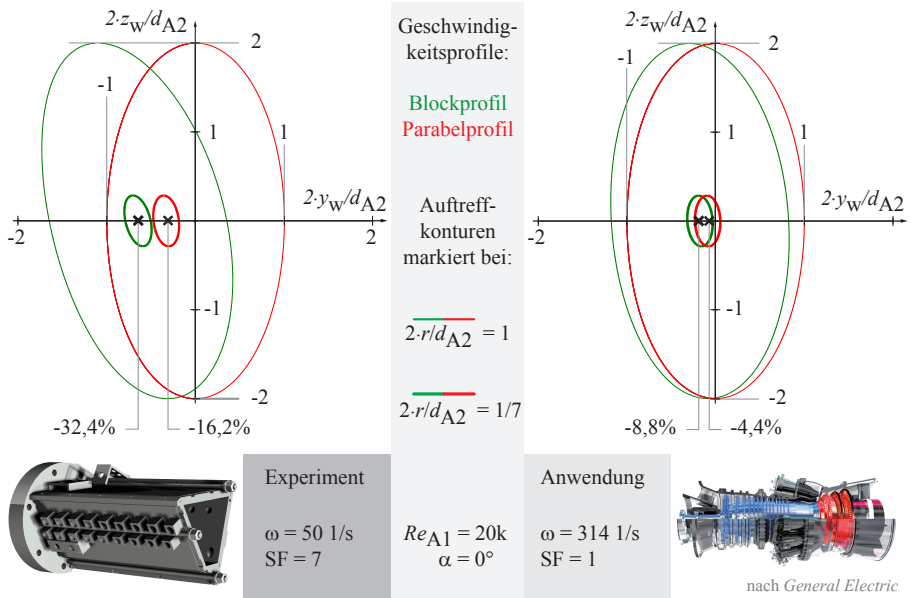


Abbildung 5.31.: Vergleich der berechneten Auftreffkonturen bei experimentellen und technischen Randbedingungen mit gleichem Anstellwinkel

5.3. Experimentelle Untersuchung der Zyklonkühlung

Neben der Prallkühlung ist der zweite repräsentative Fall zur Validierung der SAM die in Kap. 2.6 beschriebene Zyklonkühlung. Ebenso wie bei der Prallkühlung wird der Stoffübergang von den Kanalwänden an die durchströmende Luft mittels NSM untersucht. Die Ergebnisse werden in Kap. 5.3.1 diskutiert. Variiert werden dabei die Reynolds-Zahl Re_{HK} Gl. 5.14, die Rotationszahl Ro_{HK} Gl. 5.15 sowie die Filmkühlabnahme FKA nach Gl. 5.16. Letztgenannte ist der Anteil am Massenstrom, der durch die Filmkühlbohrungen abgeführt wird.

$$Re_{HK} = \frac{\rho(T, p) d_{hHK} u_{HK}}{\eta(T, p)} \quad (5.14)$$

$$Ro_{HK} = \frac{\omega d_{hHK}}{u_{HK}} \quad (5.15)$$

$$FKA = \frac{\dot{m}_{FKA}}{\dot{m}_{zu}} \quad (5.16)$$

Zur Bildung der Reynolds-Zahl wird der hydraulische Durchmesser des Hauptkanals d_{hHK} als charakteristische Länge verwendet. Als charakteristische Geschwindigkeit wird die mittlere Strömungsgeschwindigkeit im selben u_{HK} herangezogen. Die

Stoffwerte Massendichte $\rho(T, p)$ und dynamische Viskosität $\eta(T, p)$ werden mittels gemessener Zustandsgrößen berechnet. Die Rotationszahl wird mit der Drehkreisfrequenz ω und derselben charakteristischen Länge und Geschwindigkeit gebildet, die bei der Reynolds-Zahl verwendet werden. Die Werte der Variationsparameter sind in Tab. 5.3 angegeben.

FKA Re_{HK}	0,0			1,0		
	45k	75k	100k	45k	75k	100k
Ro_{HK}	0,164	0,098	0,073	0,164	0,098	0,073

Tabelle 5.3.: Vermessene Parameterkonfigurationen beim Zyklonkühlkanal

Weiterhin werden die phänomenologischen Eigenschaften der Strömung im Zyklonkühlkanal experimentell bestimmt und in Kap. 5.3.2 diskutiert. Dazu wird das jeweilige Geschwindigkeitsfeld bei einer Filmkühlabnahme von $FKA = 0$ und $FKA = 1$ ohne Systemrotation mittels MRV vermessen.

Sowohl die Ergebnisse der Strömungsfeldvermessung als auch der Stoffübergangsmessung wurden bereits vom Autor in [4] veröffentlicht und werden daher in diese Arbeit ohne explizite Zitierung integriert.

5.3.1. Stoffübergang der Zyklonkühlung

Genauso wie bei der Prallkühlung wird bei allen Auswertungen des Stoffübergangs in Form der Sherwood-Zahl Sh die Fernfeldkonzentration zu Null gesetzt

$$\xi_\infty \stackrel{!}{=} 0$$

Ein Einfluss einer möglichen Rückströmung oder auch einer Konzentrationsanreicherung in Totwassergebieten ist damit nicht korrekt erkennbar. Die Kanalwand des Zyklonrohres ist bei den Stoffübergangsuntersuchungen nicht vollständig mit Naphthalin beschichtet, um die zur Lagekorrektur benötigten Referenzflächen (siehe Kap. 3.1.5) zu erhalten. Dieses betrifft den Bereich des Drallerzeugers ($x \leq 14,25 d \dots 16 d$ siehe Abb. 2.5 wobei $d \equiv d_{hFKB}$) inklusive dem Boden sowie die Kanalwand ab der Hälfte des letzten Filmkühlbohrungsabstandes ($x \geq 92,5 d$). In diesen Bereichen ist der Kanal daher diabat. Da die Naphthalin-Schicht auf das Substrat aufgetragen wird, stellt der Schichtbeginn am Drallerzeuger eine bei der Ergebnisinterpretation zu berücksichtigende Kante dar. Die Verringerung des Durchmessers des Strömungsquerschnitts am Anfang einer Messung von zwei Schichtdicken, also etwa $2 \cdot S \approx 1 \text{ mm}$, ist dabei für die Reynolds-Zahl allerdings vernachlässigbar. Die Kante beeinflusst aber den lokalen Stoffübergang drastisch. Verlässliche Beobachtungen sind daher nur ab etwa der dritten Filmkühlbohrung ($x = 50 d$) zu gewinnen. Vor jeder PRE-Messung wird die Naphthalin-Schicht vollständig neu aufgetragen und nur leicht manuell geschliffen, um Tropfnasen zu entfernen.

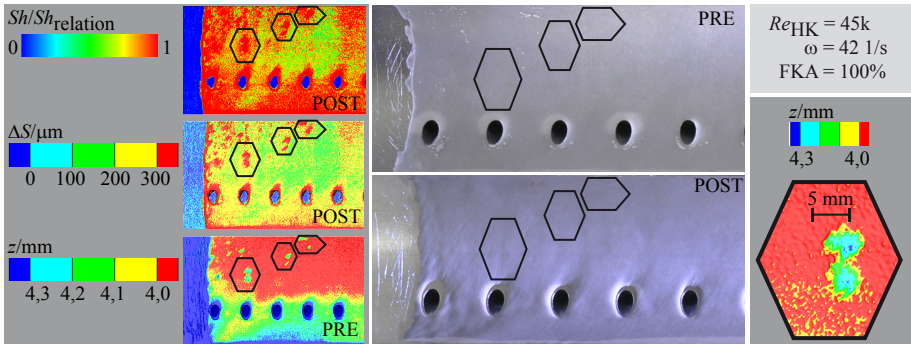


Abbildung 5.32.: Vergleich von $Sh/Sh_{relation}$, ΔS und Fotoaufnahme der Schicht im Bereich der Dellen

Sie wird aber nicht mechanisch bearbeitet. Danach findet eine kurzzeitige¹⁴, konvektiv getriebene Sublimation zur Entstaubung der Oberfläche statt. Die Vermessung der Schichtdickendifferenz erfolgt in Rohrlängsrichtung x mit einer Auflösung von 4/mm und in Umfangsrichtung Φ_{global} mit einer Auflösung von $1,733/^\circ$, was etwa 4/mm in Wandkoordinatenrichtung entspricht. Auf eine Untersuchung der Reproduzierbarkeit der NSM bei der Zyklonkühlung wird bewusst verzichtet, da von dieser keine weiteren Erkenntnisse zu erwarten sind. Die quantitative Aussagekraft der ermittelten Sherwood-Zahl wird generell als unzureichend angenommen. Daher erfolgt die Interpretation des Stoffübergangs, genauso wie beim Prallkühlkanal, nur anhand der Strukturen der Sherwood-Zahl-Verteilung $Sh(x, \Phi_{global})$. Um diesen Aussagen eine gewisse Verlässlichkeit zuschreiben zu können, wird jede Parameterkonstellation ohne Systemrotation einmal wiederholt vermessen. Nachfolgend wird nur das Ergebnis einer jeweiligen Messung dargestellt. Eine vollständige Übersicht über alle Ergebnisse findet sich in Tab. T.1. Um die Strukturen von Sh zu verdeutlichen, ist die ermittelte Sherwood-Zahl bezogen auf einen willkürlich gewählten Wert $Sh_{relation}$. Die Werte dieses Verhältnisses liegen dann im Bereich von Null bis ungefähr Eins, wodurch die Strukturen des Stoffübergangs besser miteinander verglichen werden können. In Tab. 5.4 sind die Verteilungen von $Sh/Sh_{relation}$ der relevanten Parameterkonstellationen dargestellt. Allen Ergebnissen gemein ist eine gewisse Fleckigkeit. Ursache für die Flecken sind einerseits Unebenheiten in der Naphthalin-Schicht, wie Tropfhasen, die bereits vor der PRE-Messung trotz Schleifens der Schicht vorhanden sind. Deren Erhöhung liegt bei etwa $350 \mu m$. Andererseits werden von der optischen Oberflächenvermessung Dellen in der Naphthalin-Schicht gemessen, die mit dem bloßen Auge erkennbar sein müssten. Der Vergleich in Abb. 5.32 von Messwerten der Schichtdickendifferenz ΔS und des gemessenen Abstands von Schicht zum Sensor z mit den Fotoaufnahmen der Schicht zeigt jedoch keine Übereinstimmungen. Die von der Oberflächenvermessung bestimmten Dellen von etwa 0,3 mm Tiefe und mit Erstreckungen von etwa 5 mm könnten daher Messfehler ungeklärter Ur-

¹⁴ Etwa 10 Minuten bei $Re_{HK} = 45k$ oder 5 Minuten bei $Re_{HK} = 75k$ beziehungsweise $Re_{HK} = 100k$

sache sein. Sie gilt es, genauso wie die Tropfnasen, bei der Interpretation zu ignorieren.

Prinzipielle Verteilung Die prinzipiellen Verteilungen von Sh/Sh_{relation} sind unabhängig von der Parameterkonstellation äußerst gleichmäßig beziehungsweise ändern sich monoton mit der Rohrlängsachse x (siehe Tab. 5.4). Lokale Strukturen mit hohen Gradienten, im folgenden Nachläufe genannt, sind nur nahe der Filmkühlbohrungen zu erkennen. Ausgeprägt sind diese jedoch nur für den technisch eher irrelevanten Fall, bei dem keine Masse durch die Bohrungen abgeführt wird ($FKA = 0\%$).

Einfluss der Reynolds-Zahl ohne Filmkühlabnahme und ohne Systemrotation Mit steigender Reynolds-Zahl Re_{HK} scheint der Wert von Sh/Sh_{relation} außerhalb der Nachläufe mit der Rohrlängsachse x leicht abzunehmen (siehe erste Zeile in Tab. 5.4). Diese vermeintliche Abnahme liegt allerdings im Rahmen der Unsicherheit, sodass der Stoffübergang überall als etwa gleich groß anzunehmen ist.

Einfluss der Reynolds-Zahl ohne Filmkühlabnahme und mit Systemrotation Die Systemrotation ändert die gleichmäßige Verteilung von Sh/Sh_{relation} nicht (siehe zweite Zeile in Tab. 5.4). Auch hier zeigt sich eine Abnahme des Stoffübergangs mit der Rohrlängsachse. Diese liegt allerdings ebenfalls im Bereich der Unsicherheit.

Einfluss der Reynolds-Zahl mit Filmkühlabnahme und ohne Systemrotation Eine Reduktion von Sh/Sh_{relation} mit der Längsachse x , die eindeutig außerhalb der Unsicherheit liegt, ist für die Zyklonkühlung mit vollständiger Filmkühlabnahme $FKA = 100\%$ feststellbar (siehe dritte Zeile in Tab. 5.4). Hierbei reduziert sich der Stoffübergang von $Sh/Sh_{\text{relation}} \approx 1$ nahe dem Drallerzeugerschlitze auf $Sh/Sh_{\text{relation}} \approx 0,3$ nahe dem Rohrende.

Einfluss der Reynolds-Zahl mit Filmkühlabnahme und mit Systemrotation Die Verteilung des Stoffübergangs, wie sie bei vollständiger Filmkühlabnahme $FKA = 100\%$ vorliegt, wird durch die Systemrotation nicht beeinflusst. Eine Abnahme von Sh/Sh_{relation} um etwa 70% vom Bereich des Drallerzeugerschlitzes bis zum Rohrende liegt auch ohne Systemrotation vor.

Fazit Mit der NSM ist es nur möglich, die Filmkühlabnahme als einzigen Einflussparameter für die Verteilung des Stoffübergangs bei der Zyklonkühlung sicher zu identifizieren. Weder Einflüsse der Reynolds-Zahl noch der Systemrotation lassen sich eindeutig bestimmen. Zudem treten keine lokal beschränkten Strukturen von Sh auf wie die Auftreffgebiete bei der Prallkühlung, abgesehen von den Nachläufen der Filmkühlbohrungen.

FKA	Ro _{HK}	Re _{HK} = 45k	Re _{HK} = 75k	Re _{HK} = 100k
<div>Sh / Sh_{relation} 0<div>1</div></div>				
0%	0	<div>Sh_{relation} ≅ 1.300</div>	<div>Sh_{relation} ≅ 1.600</div>	<div>Sh_{relation} ≅ 1.300</div>
0%	~ ω ≈ 42 1/s	<div>Sh_{relation} ≅ 2.200</div>	<div>Sh_{relation} ≅ 2.800</div>	<div>Sh_{relation} ≅ 3.000</div>
100%	0	<div>Sh_{relation} ≅ 2.000</div>	<div>Sh_{relation} ≅ 2.000</div>	<div>Sh_{relation} ≅ 1.500</div>
100%	~ ω ≈ 42 1/s	<div>Sh_{relation} ≅ 2.000</div>	<div>Sh_{relation} ≅ 1.200</div>	<div>Sh_{relation} ≅ 2.200</div>
<div><div><div>Φ_{global}</div><div>Orientierung</div><div>x</div></div><div><div>Tropfphase</div></div><div><div>Dellen</div></div></div>				

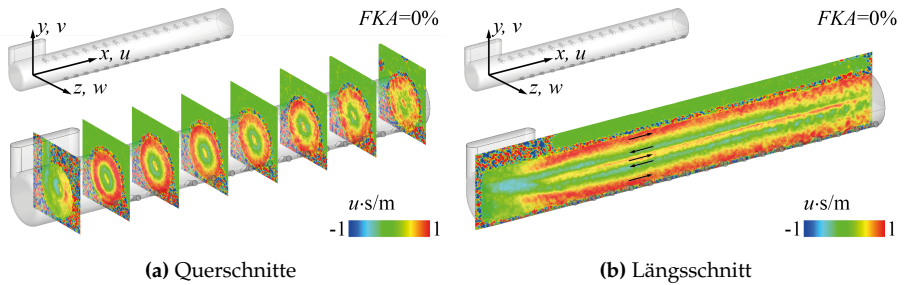
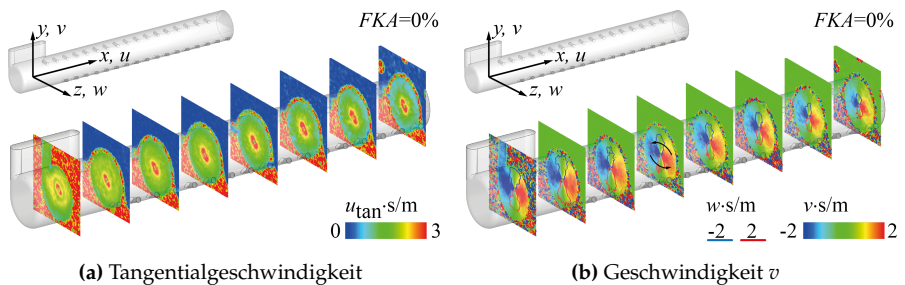
Tabelle 5.4.: Sherwood-Zahl-Verteilungen bei der Zyklonkühlung mit vollständiger und ohne Filmkühlabnahme sowie mit und ohne Systemrotation

5.3.2. Strömung der Zyklonkühlung

Es werden die Strömungsfelder des Zyklonkanals bei zwei Parameterkonstellationen mittels MRV experimentell bestimmt. In einem Fall liegt keine Filmkühlabnahme vor $FKA = 0\%$ und im anderen Fall wird das Fluid vollständig durch die Filmkühlbohrungen abgeführt, $FKA = 100\%$. Die Reynolds-Zahl ist in beiden Konstellationen $Re_{HK} = 32,7k$.

Strömung ohne Filmkühlabnahme Liegt keine Filmkühlabnahme vor ($FKA = 0\%$), so ist die Zyklonströmung umfangssymmetrisch um die Rohrlängsachse x (siehe Abb. 5.33). Diese Struktur ist für alle Rohrlängspositionen annähernd identisch. Auffällig an der in Abb. 5.33 gezeigten Verteilung der axialen Geschwindigkeit u ist ein hohlzylindrisches Rückströmgebiet ($u < 0$). Umschlossen wird dieses von einem wandnahen Vorströmgebiet ($u > 0$). Im Kern des Rückströmgebietes liegt ein zylindrischer Bereich mit ebenfalls positiver Axialgeschwindigkeit ($u > 0$) vor. Aus der Bilanz der axialen Geschwindigkeiten pro Querschnitt ergibt sich ein Rückströmanteil von etwa 5% des Gesamtvolumenstroms. Der Betrag des positiven Volumenstroms im Kern ist kleiner als dieser Anteil, sodass die wandnahe Vorströmung zu mindestens 0,5% aus rezirkuliertem Fluid bestehen muss. Bei den Stoffübergangsmessungen könnte daher der wandnahen Vorströmung bereits nahe dem Drallerzeugerschlitze ein Gemisch aus Luft und Naphthalin-Dampf beigemischt werden. Die Fernfeldkonzentration ζ_∞ würde dann entgegen der Annahme von Null verschieden sein. Im ungünstigsten Fall wäre die Rückströmung mit Naphthalin-Dampf gesättigt und das treibende Konzentrationsgefälle läge bei 99,5% des angenommenen Gefälles.

Die für den WS-Übergang ausschlaggebenden wandnahen Geschwindigkeitsgradienten sind bei den hier verwendeten MRV-Messungen nicht aufgelöst. Allerdings zeigt die Verteilung der Tangentialgeschwindigkeit $u_{\tan} = \sqrt{w^2 + v^2}$ in Abb. 5.34a, analog zur Verteilung der Axialgeschwindigkeit, eine in Längsrichtung x konstante Struktur. Auch die Drallrichtung ist über die Rohrlänge konstant, wie aus der Darstellung Abb. 5.34b zur Verteilung der Geschwindigkeit in y -Richtung v zu entnehmen ist. Die wandnahen Geschwindigkeitsgradienten dürften daher überall näherungsweise konstant sein, mit Ausnahme des Bereichs vom Drallerzeuger. Diese Vermutung liefert eine plausible Erklärung für die gemessene gleichmäßige Verteilung des Stoffübergangs (Sh/Sh_{relation}).

Abbildung 5.33.: Axialgeschwindigkeit u der Zyklonströmung ohne FilmkühlabnahmeAbbildung 5.34.: Querschnitte der Geschwindigkeiten in y -Richtung v sowie der Tangentialgeschwindigkeiten u_{\tan} der Zyklonströmung ohne Filmkühlabnahme

Strömung mit Filmkühlabnahme Liegt eine vollständige Filmkühlabnahme vor ($FKA = 100\%$), so ist die Zyklonströmung nur näherungsweise umfangssymmetrisch um die Rohrlängsachse x (siehe Abb. 5.35). Zudem verändert sich die Geschwindigkeitsverteilung im Rohrquerschnitt mit der Längsrichtung x . Ebenso wie bei der Zyklonströmung ohne Filmkühlabnahme zeigt die in Abb. 5.35 dargestellte Verteilung der axialen Geschwindigkeit u ein Rückströmgebiet ($u < 0$). Dieses wird ebenfalls von einem wandnahen Vorströmgebiet ($u > 0$) umschlossen. In dessen Kern existiert jedoch kein weiteres Vorströmgebiet. Aus der Bilanz der Axialgeschwindigkeit im Bereich nahe dem Drallerzeugerschlitze folgt, dass der vorströmende Volumenstrom zu etwa 15% aus rezirkulierendem Fluid besteht. Bei größerer Axialkoordinate x ist der Anteil geringer. Eine lokale Unterschätzung des treibenden Konzentrationsgefälles und damit des Stoffübergangs von 15% könnte daher bei den Stoffübergangsmessungen vorliegen. Hierzu müsste die Rückströmung allerdings mit Naphthalin-Dampf gesättigt sein. Anders als bei der Zyklonströmung ohne Filmkühlabnahme ändert sich die Verteilung der Tangentialgeschwindigkeit $u_{\tan} = \sqrt{w^2 + v^2}$ mit der Rohrlängsachse x , wie in Abb. 5.36a zu erkennen ist. Nicht nur die Struktur ändert sich, sondern auch der pro Querschnitt auftretende Maximalwert. Er sinkt mit der Längskoordinate auf etwa 30% des Wertes nahe dem Drallerzeuger. Die Drallrichtung ist jedoch überall konstant, wie aus der Verteilung

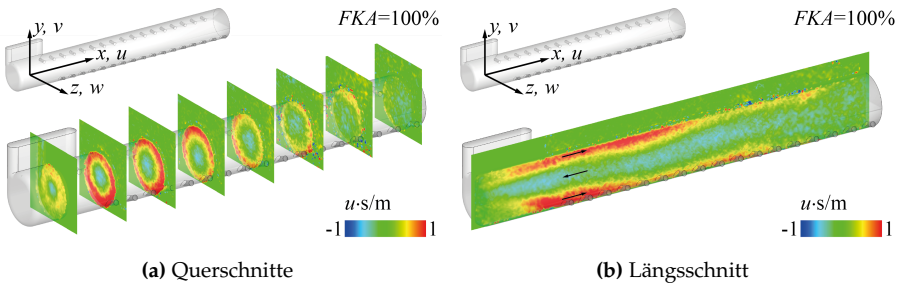


Abbildung 5.35.: Axialgeschwindigkeit u der Zyklonströmung mit Filmkühlabnahme

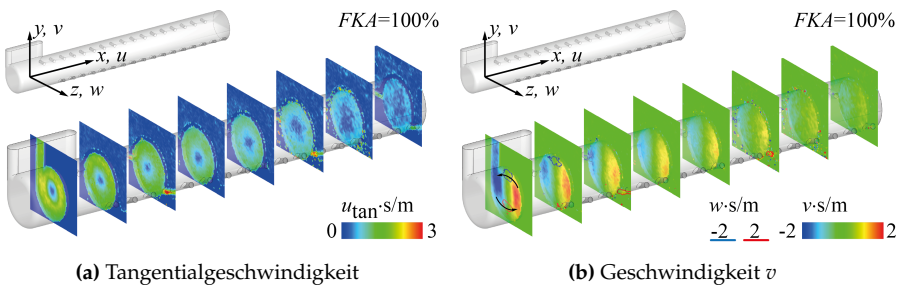


Abbildung 5.36.: Querschnitte der Geschwindigkeiten in y -Richtung v sowie der Tangentialgeschwindigkeiten u_{tan} der Zyklonströmung mit Filmkühlabnahme

der Geschwindigkeit v in y -Richtung in Abb. 5.36b zu entnehmen ist. Generell dürften die wandnahen Geschwindigkeitsgradienten infolge der Filmkühlabnahme genauso wie die Geschwindigkeiten selbst mit der Rohrlängskoordinate abnehmen. Diese Vermutung liefert eine nachvollziehbare Erklärung für die Abnahme des Stoffübergangs (Sh/Sh_{relation}) mit der Längskoordinate.

Fazit Die Strömung der Zyklonkühlung stützt die Ergebnisse der Stoffübergangsmessungen. Ein analytisches Modell zur Beschreibung des Rotationseinflusses lässt sich aber vom Autor nicht entwickeln. Hierzu fehlen charakteristische, einfach zu beschreibende Merkmale der Strömung. Ein empirisch basiertes Modell ist ebenfalls nicht zielführend, da die Unsicherheit der NSM zu groß ist. Weiterhin enthalten die Stoffübergangsmessungen eine zusätzliche Ungenauigkeit von bis zu 15%, begründet durch die Unkenntnis des tatsächlichen treibenden Konzentrationsgefälles.

6. Eignung der Skalierten Analogie Methode

Primäres Ziel dieser Arbeit ist es, die Eignung der SAM zur Untersuchung von Turbinenschaufelkühlungen zu bestimmen. Die Erkenntnisse aus der theoretischen Betrachtung in Kap. 4 werden dazu mit den experimentellen Ergebnissen aus Kap. 5 gemäß dem in Kap. 3 erklärten Vorgehen (siehe Abb. 2.1 auf Seite 4) kombiniert. Hierzu sind die nachfolgend aufgelisteten Kernaussagen wesentlich.

Kernaussagen der theoretischen Betrachtung

- Für Systeme mit Pumpwirkung oder signifikanten Auftriebseffekten ist die SAM generell nicht verwendbar.
- Im Heißgas-System unter den Bedingungen des GF II liegt keine WSA vor. Die theoretische Unsicherheit durch den Druckterm ist nicht abschätzbar.
- Die theoretische Unsicherheit im GF I ist mindestens $\pm 8\%$.
- Die Reynolds-Zahl ist erst ab Variationen von zirka $\pm 25\%$ eine zuverlässige Korrelationsgröße.

Kernaussagen zur Reproduzierbarkeit der NSM

- Die Schwankung der NSM ist mit $|\Delta S_{rel}| = 138\%$ inakzeptabel hoch. Sie ist durch das Sublimationsverhalten von Naphthalin plausibel erklärbar.
- Als Folge der hohen Schwankung müssen sich lokale Unterschiede in der Sherwood-Zahl mindestens um den Faktor 5,5 unterscheiden, um als aussagekräftig zu gelten. Aber selbst dann gilt die Verteilung der Sherwood-Zahl nur qualitativ.

Kernaussagen der experimentellen Untersuchung der Prallkühlung

- Die quantitative Reproduzierbarkeit der Sherwood-Zahl ist bei der Prallkühlung nachweislich unzureichend.
- Die Verteilung der Sherwood-Zahl auf den Kanalwänden entspricht qualitativ der Verteilung der Nusselt-Zahl. Jedoch variiert die Sherwood-Zahl räumlich um einen geringeren Faktor als 5,5, sodass selbst deren qualitative Verteilung nicht verlässlich ist.
- Durch die lokal definierte Strömung der Freistrahlen lässt sich ein analytisches Modell zum Rotationseinfluss herleiten. Die Vorhersagegenauigkeit des Modells bezüglich des gemessenen Rotationseinflusses auf den Stoffübergang ist akzeptabel.
- Der Rotationseinfluss auf die Wärmeübertragung in der Prallkühlung einer Turbinenschaufel ist nach dem Modell als vernachlässigbar gering abschätzbar. Die Einflüsse einer Pumpwirkung und von Auftriebskräften sind jedoch nicht darin enthalten.

Kernaussagen der experimentellen Untersuchung der Zyklonkühlung

- Durch die NSM lässt sich nur die Filmkühlabnahme als Einflussparameter auf den Stoffübergang identifizieren. Weder die Systemrotation noch die Reynolds-Zahl hat einen signifikanten Einfluss.
- Sowohl die Strömung bei keiner und bei vollständiger Filmkühlabnahme zeigen ausgeprägte Rezirkulationsgebiete. Hierdurch ist eine Verringerung des Konzentrationsgefälles um weniger als 1% zu erwarten, wenn keine Filmkühlabnahme vorliegt. Bei vollständiger Filmkühlabnahme verringert sich das Gefälle möglicherweise deutlich stärker um bis zu 15%. Die ermittelte Sherwood-Zahl unterschätzt die tatsächliche daher gegebenenfalls um 15%.
- Die Strömungsformen sowie deren Änderungen mit der Rohrlängsachse stützen die qualitativen Verteilungen der Sherwood-Zahl. Jedoch variiert die Sherwood-Zahl räumlich um einen geringeren Faktor als 5,5, sodass selbst deren qualitative Verteilung nicht verlässlich ist.
- Für die Strömungsform lässt sich kein einfaches analytisches Modell zum Rotations-einfluss oder zum Einfluss der Filmkühlabnahme entwickeln.

$$\begin{aligned}
 Sh \cdot \underbrace{[1 \pm 138\%/2]}_{\text{Relative Abweichung der NSM}} \cdot \underbrace{[1 \pm 8\%]}_{\text{Theoretisch im GFI}} &= Sh \cdot \underbrace{[29\%_{MW} \dots 183\%_{MW}]}_{\text{Relative Abweichung der SAM: } |\Delta Sh / Nu|} = Nu \\
 \Rightarrow Sh / Nu &= \frac{\frac{|\Delta Sh / Nu|}{2} - 1}{-1 - \frac{|\Delta Sh / Nu|}{2}} \hat{=} 4,4\% \dots 74,6\%
 \end{aligned}$$

Die SAM und damit die Übertragung der Sherwood-Zahl auf die Nusselt-Zahl zeigt eine gesamte Ungenauigkeit, ausgedrückt als relative Abweichung $|\Delta Sh / Nu|$ von $29\%_{MW}$ bis zu $183\%_{MW}$. Somit kann ein Stoffübergangsexperiment eine Sherwood-Zahl liefern, deren Wert im Bereich von $4,4\%$ bis $74,6\%$ der tatsächlich in der Turbinenkühlung vorliegenden Nusselt-Zahl liegt. Die experimentell bestimmte Sherwood-Zahl und die interessierende Nusselt-Zahl können sich daher durchaus um den Faktor $1/4,4\% \approx 23$ unterscheiden, ohne dass dieses bei der SAM feststellbar ist. Für Strömungen unter Systemrotation wird die mögliche Abweichung um einen weiteren, nicht abschätzbaren Faktor größer sein. Mit dieser relativ großen Unsicherheit lässt sich aus dem Stoffübergang im Experiment nur eine sehr grobe quantitative Aussage zum Wärmeübergang in der Kühlung einer Turbinenschaufel treffen. Empirische Korrelationen mit dieser Unsicherheit dürften für zukünftige Optimierungen von konvektiv getriebenen Schaufelkühlungen unbrauchbar sein. Die qualitativen räumlichen Verteilungen der Wärme- und der Stoff-Übergangszahl können aber in Einzelfällen wie bei der Prallkühlung gut übereinstimmen. Hierzu müssen zwangsläufig sowohl der Stoff- als auch der Wärmeübergang bekannt sein. Die SAM verliert damit ihren eigentlichen Sinn, die Bestimmung des Wärmeübergangs zu umgehen. Jedoch selbst wenn Wärme- und Stoffübergang qualitativ ähnlich und bekannt sind, bedarf es eines nicht auf empirische Daten gestützten Modells, um Effekte wie den Rotationseinfluss vom Experiment auf die Schaufelkühlung zu übertragen. Die nicht korrekte Skalierung der Strömung erfordert diesen Umweg. Enthält ein derartiges

Modell den Einfluss von Auftriebseffekten und der Pumpwirkung, so dürfte es für die Bedingungen des Heißgas-Systems verwendbare Ergebnisse liefern. Validieren ließe sich ein solches Modell im Stoff-System aber nur in Hinsicht auf den Rotationseinfluss und die Pumpwirkung, da Auftriebseffekte im Stoff-System anders und üblicherweise geringer ausfallen als im Heißgas-System. Berücksichtigt das Modell wie jenes der Freistrahlskrümmung keine Pumpwirkung und keine Auftriebseffekte, so ist dessen Anwendung für die Bedingungen der Turbinenkühlung mit einer nicht bekannten Unsicherheit verbunden. Diese Unsicherheit weisen aber auch die direkten Messergebnisse der Stoffübergangsmessungen auf, da bei der SAM ebenfalls die Pumpwirkungen und die Auftriebseffekte nicht skaliert werden können.

Fazit Das grundsätzliche Vorgehen der SAM zeigt eine akzeptable theoretische Ungenauigkeit von $\pm 8\%$, sofern keine Systemrotation vorliegt. Zur Untersuchung der internen Kühlung von Statorschaufeln ist sie damit geeignet. Liegt Systemrotation vor, so ist die Skalierung der Strömung zwar mit gewissen Unsicherheiten möglich, jedoch ist die WSA nicht gegeben. Direkt verwertbare Aussagen zu internen Kühlungen von Rotorschaufeln lassen sich daher mit der SAM nicht generieren. Qualitative Erkenntnisse und Tendenzen zum Rotationseinfluss können aber in Einzelfällen sehr wohl geschlussfolgert werden. Allerdings ist die Ungenauigkeit der NSM sehr groß, zumindest in der hier verwendeten Variante mit Vermessung der Schichtdickenänderung. Die beobachteten qualitativ beschreibbaren Ergebnisse und Tendenzen müssen daher extrem ausgeprägt sein, um als verlässlich zu gelten. Zur Bestimmung relativ geringer Einflüsse, wie beispielsweise bei der Optimierung einer bestimmten Kühlmethode, ist die SAM basierend auf der NSM folglich ungeeignet. Für die Identifikation von Parametern mit großem Einfluss oder für qualitative Untersuchungen mit einem sehr großen Parameterbereich reicht die Genauigkeit der NSM aber in Einzelfällen aus. Dann können Modelle zur Vorhersage bestimmter Phänomene mittels Stoffübergangsuntersuchungen qualitativ validiert werden. Zur Herleitung oder Ermittlung dieser Modelle bedarf es aber analytischer Überlegungen und quantitativ zuverlässiger Ergebnisse, welche nicht mit der SAM erbracht werden können. Die SAM mit der hier verwendeten NSM ist daher als alleiniges Vorgehen zur Untersuchung einer Schaufelkühlung ungeeignet.

7. Zusammenfassung

Die zukünftige Entwicklung neuer Methoden zur konvektiv getriebenen Kühlung von Turbinenschaufeln bedarf detaillierterer Erkenntnisse, als sie die bisherige Angewandte Forschung liefert. Inwieweit sich die etablierten Vorgehensweisen, insbesondere die Experimentellen, für diesen Erkenntnisgewinn eignen, ist daher eine entscheidende Information. In der vorliegenden Arbeit werden die Eignung und die Einschränkungen für ein häufig verwendetes Vorgehen bei der Untersuchung von Turbinenkühlungen, die Skalierte Analogie Methode (SAM)¹ bestimmt und diskutiert.

Die SAM wurde entwickelt, um Aussagen zum Wärmetübergang in schlecht zu vermessenden Systemen, wie der Innenkühlung von Turbinenlaufschaufeln zu gewinnen. Experimentell untersucht wird dabei jedoch nur der Stoffübergang in einem sich möglichst analog verhaltenden, oft geometrisch hochskalierten und damit leichter zu vermessenden System. Die theoretische Basis dieses Vorgehens bilden die Analogie von Wärme- und Stoffübertragung (WSA) sowie die Skalierung der Strömung aufgrund der dimensionslosen Bewegungsgleichungen. Zur experimentellen Bestimmung des Stoffübergangs wird üblicherweise die Naphthalin Sublimations Methode (NSM) verwendet. Sowohl in der Theorie als auch in der NSM liegen bisher nicht umfassend betrachtete Unsicherheiten der SAM, die deren Eignung für zukünftige Untersuchungen einschränkt. Die Ermittlung und Quantifizierung dieser Unsicherheiten sind Teil dieser Arbeit. Als Basis hierzu dienen theoretische Betrachtungen und experimentelle Ergebnisse. Aus der Gegenüberstellung der so gewonnenen Unsicherheiten mit den Messergebnissen der NSM, welche bei Untersuchungen von zwei repräsentativen Kühlmethoden gewonnen werden, wird die Eignung der SAM abgeschätzt. Als repräsentativ werden hier die Prallkühlung und die Zyklonkühlung angesehen, da deren Strömungsformen sehr unterschiedlich sind. Sie stellen die Grenzen des weiten Bereichs zukünftig möglicher Kühlströmungen dar.

Zur Bestimmung der theoretischen Unsicherheit werden die wesentlichen Gleichungen der SAM aus der Boltzmann Transportgleichung durch Vereinfachungen mittels zahlreicher Postulate hergeleitet. Der Vergleich dieser Annahmen mit den tatsächlich zu erwartenden Bedingungen im Experiment sowie in der Schaufelkühlung liefert eine theoretische Ungenauigkeit der SAM von $\pm 8\%$. Dieser Wert gilt jedoch nur für Strömungen im Inertialsystem, also für Strömungen in Kanälen, die keiner Systemrotation unterliegen. Für rotierende Relativsysteme zeigt die theoretische Betrachtung, dass die WSA nicht exakt vorliegen kann. Zudem lässt sich die Erhöhung der theoretischen Unsicherheit infolge dieser Diskrepanz nicht abschätzen. Die theoretische Ungenauigkeit der SAM bei der Untersuchung von Kühlungen in Turbinenlaufschaufeln ist daher nicht ermittelbar, wird aber $\pm 8\%$ nicht unterschreiten.

¹Der Begriff „Skalierte Analogie Methode“ ist ein bisher nur in dieser Arbeit verwendeter Ausdruck.

Einen deutlich größeren Anteil an der gesamten Ungenauigkeit der SAM hat die schlechte Reproduzierbarkeit der NSM. Diese wird aus Doppelproben-Sublimations-Experimenten sowie Messdaten früherer Untersuchungen² zu einer relativen Abweichung von $\pm 69\%$ bestimmt. Der Grund für diese schlechte Wiederholbarkeit wird im Sublimationsverhalten der Naphthalin-Schicht gefunden. Bisher nicht in diesem Zusammenhang beobachtete Poren in der Naphthalin-Schicht zeigen, dass eine fundamentale Annahme der NSM nicht zutrifft und zu der schlechten Reproduzierbarkeit führt. Die Schichtdickenänderung als relevante Messgröße der NSM ist, anders als bisher angenommen, kein adäquates Maß für die sublimierte Masse an Naphthalin. Trotz aufwändiger Untersuchungen mit dem gezielten Ausschluß potentieller Einflussparameter, wie der Vermeidung von Lunkern in der Naphthalin-Schicht durch Entgasung der Naphthalin-Schmelze, bleibt die genaue Ursache der Poren ungeklärt.

Unter Missachtung aller Einschränkungen, deren Auswirkungen nicht quantifiziert werden können, ist bei der SAM mit einer relativen Abweichung vom Mittelwert von $|\Delta Sh / Nu| \approx 183\%_{MW}$ zu rechnen. Diese Ungenauigkeit bezieht sich auf die Übertragung der experimentell bestimmten Sherwood-Zahl Sh , als Maß für den Stoffübergang, zur Nusselt-Zahl Nu , als Maß für den Wärmeübergang im Kühlkanal einer Turbinenstatorschaufel. Vereinfacht ausgedrückt können sich bei der SAM die Sherwood-Zahl und die Nusselt-Zahl um einen Faktor von bis zu 23 unterscheiden, ohne dass dieses bemerkbar ist. Da die schlechte, nicht mittelwertstreu Reproduzierbarkeit der NSM den überwiegenden Anteil an dieser Abweichung ausmacht, kann durch Mehrfachmessungen die Aussagekraft der SAM nicht erhöht werden. Für quantitative Aussagen ist die SAM somit nur in wenigen Fällen geeignet.

Die Eignung der SAM für zukünftige Untersuchungen auch von Kühlströmungen in rotierenden Relativsystemen ist jedoch in Einzelfällen trotz großer Ungenauigkeit gegeben. Erkenntnisse, wie die qualitative Verteilung der Sherwood-Zahl auf den Kanalwänden können unter Umständen für prinzipielle Aussagen und zur Validierung von analytischen oder numerischen Modellen sowie zur Stützung anderer Messergebnisse verwendet werden. Qualitativ verlässlich sind diese Erkenntnisse in Bezug auf die Reproduzierbarkeit der NSM, sobald lokale Unterschiede in der Wandverteilung der Sherwood-Zahl vom Faktor 5,5 oder größer auftreten. Obwohl in beiden hier untersuchten repräsentativen Kühlmethoden nur geringere lokale Unterschiede vorhanden sind, können in der Wandverteilung der Sherwood-Zahl einige Einflüsse plausibel identifiziert werden.

Bei der Zyklonkühlung existiert nur ein mit der NSM erkennbarer Einflussparameter, die Filmkühlabnahme FKA . Wird sie von $FKA = 0$ auf $FKA = 1$ verändert, so sinkt die Sherwood-Zahl mit der Rohrlängskoordinate stärker ab. Andere denkbare Einflussparameter wie die Systemrotation oder die Reynolds-Zahl sind nicht feststellbar. Hingegen sind bei der Prallkühlung mit der Reynolds-Zahl, der Rotationszahl, dem Anstellwinkel zur Rotationsachse und der Art der Massenabfuhr mehrere

²Die Messdaten wurden dem Autor von Herrn Nils Winter zur Verfügung gestellt.

Parametereinflüsse identifizierbar. Ihre Wirkung ist jedoch ähnlich. Sie verschieben und verkippen die Gebiete hoher Sherwood-Zahlen in den Auftreffgebieten der Freistrahlen (Prallstrahlen). Da diese Beobachtungen jedoch nicht quantitativ verlässlich sind, besitzen sie, sowie etwaige aus ihnen abgeleitete empirische Korrelationen keine Aussagekraft. Die Ergebnisse der SAM sind daher ohne zusätzliche Informationen, wie beispielsweise dem Geschwindigkeitsfeld der Strömung, nicht glaubwürdig und nicht sinnvoll verwertbar.

Aus den Geschwindigkeitsfeldern der Zyklonkühlung und der Prallkühlung, welche in dieser Arbeit für ausgewählte Parameterkonstellationen mittels Magnetic Resonance Velocimetry (MRV) vermessen werden, lassen sich die Verteilungen der Sherwood-Zahl plausibel interpretieren. Bei der Zyklonströmung stützt eine beobachtete starke Drallabnahme mit der Rohrlängskordinate bei $FKA = 1$ die ausgeprägte Verringerung der Sherwood-Zahl mit selbiger Koordinate. Die Höhe der wandnahen tangentialen Geschwindigkeiten der Strömung und damit auch deren Gradienten an der Kanalwand korrelieren gut mit den lokalen Sherwood-Zahlen und stützen deren Glaubwürdigkeit. Bei der Prallkühlung treten örtlich stark begrenzte Freistrahlen auf, deren Geschwindigkeitsprofile bis zum Auftreffen auf die jeweiligen Kanalwände nahezu unverändert bleiben. Ort und Ausdehnung der Auftreffbereiche dieser Freistrahlen zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Auftreffgebieten in der Wandverteilung der Sherwood-Zahl. Wie bei der Zyklonkühlung erhöht die Kenntnis des Geschwindigkeitsfeldes auch bei der Prallkühlung die Vertrauenswürdigkeit der Ergebnisse der SAM. Auch für andere Kühlmethode dürften prinzipielle qualitative Aussagen, die mit der SAM gewonnen werden, verlässlich sein, sofern diese mit dem Strömungsfeld korrelieren. Quantitative Aussagen lassen sich jedoch auch bei simultaner Kenntnis von Geschwindigkeitsfeld und Wandverteilung der Sherwood-Zahl nicht direkt gewinnen. Allerdings sind die Ergebnisse der SAM dann soweit verlässlich, dass sie zur Validierung von analytischen Modellen herangezogen werden können, auch wenn die lokalen Überhöhungen der Sherwood-Zahl kleiner sind als 5,5.

Für die Zyklonkühlung lässt sich vom Autor kein analytisches Modell zu deren Verhaltensvorhersage bezüglich des Stoffübergangs entwickeln, da markante und relevante Strömungseigenschaften fehlen. Bei der Prallkühlung hingegen lässt sich der Rotationseinfluss durch ein kinetisches Modell zur Krümmung der Freistrahlen aufgrund der Coriolis-Beschleunigung berechnen. Das Modell liefert pro Freistrahle eine Auftreffkontur auf der jeweiligen Kanalwand. Diese Kontur stimmt mit dem Auftreffgebiet in der Wandverteilung der Sherwood-Zahl sowohl in Größe, Verschiebung und Verkippen sehr gut überein. Diese Übereinstimmung zeigt, dass bei der Prallkühlung sowohl die qualitativen Ergebnisse der SAM als auch das analytische Modell zur Freistrahlskrümmung als valide angesehen werden darf. Damit erfüllen zumindest die Stoffübergangsmessungen als Teil der SAM ihren Zweck. Die ohnehin stark unsichere Übertragung der Sherwood-Zahl auf die Nusselt-Zahl ist bei der Verwendung eines Modells hingegen überflüssig.

Allgemein ist die Eignung der SAM für zukünftige Untersuchungen von Kühlmetho-

den nur eingeschränkt gegeben. Es bedarf zusätzlicher Informationen wie das Strömungsfeld, damit den ermittelten Verteilungen der Sherwood-Zahl auf den Kanalwänden eine Plausibilität zugeschrieben werden kann. Um das eigentliche Ziel der SAM zu erreichen, das heißt Aussagen über Wärmeübergang in der Turbinenschaufelkühlung zu gewinnen, sind weiterhin Modelle zur Vorausberechnung bestimmter Einflüsse notwendig, die nicht auf den Messergebnissen der SAM beruhen. Zukünftig kann die SAM daher nur ein kleiner Teil eines Vorgehens zur Untersuchung von Schaufelkühlungen sein. Als einzige Methode ist sie ungeeignet.

8. Ausblick

Für zukünftige Untersuchungen von Turbinenschaufelkühlungen, insbesondere solchen in Rotorschaukeln, muss das bisherige Vorgehen mittels Strömungsskalierung und Ausnutzung der Analogie von Wärme- und Stofftransport (WSA) durch zusätzliche Methoden ergänzt oder vollständig ersetzt werden. Sicherlich ist die Skalierung der jeweiligen Strömung messtechnisch unabdingbar. Auch die Reduzierung des Temperaturniveaus und der Temperaturgradienten wird sich nur schwer vermeiden lassen. Eine nicht ganz korrekte Abbildung von Auftriebseffekten ist damit in Kauf zu nehmen. Weiterhin werden dann alle Materialkoeffizienten und damit auch die Skalierung über dimensionslose Kennzahlen eine gewisse Ungenauigkeit aufweisen. Abweichungen zwischen den Geschwindigkeits-, den Temperatur- beziehungsweise den Konzentrationsgrenzschichten in Experimenten und in der Turbinenkühlung sind daher unvermeidbar. Folglich sind die Wärme- und die Stoffübergangszahlen nur grobe Näherungen, um die tatsächlich vorherrschende Physik zu beschreiben. Aus dieser Sicht dürfte die Nutzung der WSA weiterhin gerechtfertigt sein, allerdings nicht mittels der Naphthalin-Sublimations-Methode (NSM) auf Basis der alleinigen Schichtdickenmessung.

Denkbar ist es, die NSM mit der aktuellen Messgröße der Schichtdickenänderung um weitere Messgrößen zu erweitern. Eine zusätzliche gravimetrische Bestimmung der sublimierten Masse sowie eine Bestimmung der lokalen Porenanzahl könnten die Aussagekraft der NSM gegebenenfalls ausreichend verbessern. Unbekannt bleibt jedoch trotzdem die zur Ermittlung der Sherwood-Zahl notwendige treibende Konzentrationsdifferenz des Naphthalin-Dampfes. Diese lokal experimentell zu bestimmen ist ein vielversprechender Ausweg. Berührungslose Verfahren, wie beispielsweise die Laser Induzierte Fluoreszenz (LIF), sind prinzipiell zur Vermessung der Konzentrationsgrenzschicht nutzbar (siehe [93], [94]). Gänzlich überflüssig würde die Vermessung der Massen- und Dickenabnahme der Naphthalin-Schicht werden, wenn die Geschwindigkeitsgrenzschicht bekannt wäre. Dieses entspräche der experimentellen Lösung der Massenerhaltungsgleichung, welche eine deutlich größere Aussagekraft hätte als die Abbildung des Stoffübergangs mit der Sherwood-Zahl. Bereits heute lässt sich die Geschwindigkeitsgrenzschicht durch optische Verfahren wie der Particle Image Velocimetry (PIV) vermessen. Zukünftig wird dieses aber sicherlich auch durch speziell entwickelte Formen der LIF möglich sein. Um die Eignung einer so erweiterten NSM für zukünftige Untersuchungen von Turbinenkühlungen zu bestimmen, muss deren Ungenauigkeit und Praktikabilität verlässlich ermittelt werden. Angesichts der Komplexität einer erweiterten NSM bedarf es hierzu eines weitreichenden wissenschaftlichen Vorgehens.

Eine andere Alternative ist es, auf die Nutzung der WSA zu verzichten. In Experimenten würde dann, genauso wie in der Turbinenkühlung, der Wärmeübergang zur interessierenden Größe. Die Skalierung der Strömung sowie die Reduzierung der Tem-

peraturniveaus und Temperaturgradienten wäre jedoch in den meisten Fällen trotzdem erforderlich. Allerdings könnte sich die Vermessung der Temperaturgrenzschicht technisch einfacher gestalten als die Vermessung der Konzentrationsgrenzschicht. Die experimentelle Bestimmung der Wärmestromdichte, welche heute ein etabliertes, aber technisch aufwändiges Verfahren ist, wäre aber weiterhin notwendig, um den Wärmeübergang zu bestimmen. Allerdings ließe sich dieser Aufwand umgehen, wenn die Geschwindigkeitsgrenzschicht beispielsweise durch PIV experimentell ermittelt würde. Die Energieerhaltungsgleichung wäre dann experimentell gelöst und es ließen sich deutlich aussagekräftigere Erkenntnisse gewinnen, als es mit der Abbildung des Wärmeübergangs durch die Nusselt-Zahl möglich ist. Aber auch dieses vollständig neue Vorgehen bedarf zuerst einer wissenschaftlichen Untersuchung bezüglich seiner Genauigkeit und Praktikabilität, bevor es als Methode verwendet werden sollte.

Literaturverzeichnis

- [1] A. Lerch, Untersuchungen zum Einfluss der Zyklonkühlung in einer Turbinenschaufel auf die adiabate Filmkühleffektivität, Dissertation, Technische Universität Darmstadt (2012). (16), (20), (21)
- [2] C. R. Wilke, A viscosity equation for gas mixtures, *The Journal of Chemical Physics* 18/4 (1950) 517–519. (63), (64), (223)
- [3] N. Winter, Experimentelle Untersuchung der Zyklonkühlung mithilfe von Stoffübergangsmessungen, Dissertation, Technische Universität Darmstadt (2010). (2), (6), (14), (16), (17), (22), (91), (92), (93), (97), (103), (105), (109), (115)
- [4] M. Kloss, H.-P. Schiffer, Einfluss der Rotation auf die Zyklon- und Prallkühlung fortschrittlicher Schaufelkühlsysteme, Innerhalb 13. Statusseminar AG Turbo, 2012. (2), (117), (135)
- [5] P. Berg, Experimentelle Bestimmung des örtlichen inneren Wärmeübergangs von Turbinenleit- und -laufschaufeln mit Hilfe der Analogie zwischen Wärme- und Stoffübergang, Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt (1991). (6), (14), (17), (88)
- [6] K. H. Presser, Experimentelle Prüfung der Analogie zwischen konvektiver Wärme- und Stoffübertragung bei nichtabgelöster Strömung, Wärme- und Stoffübertragung 1 (1968) 225–236. (6), (55), (56), (66), (67), (75), (78), (79), (114), (225)
- [7] R. J. Goldstein, H. H. Cho, A review of mass transfer measurements using naphthalene sublimation, *Experimental Thermal and Fluid Science* 10 (1995) 416–434. (6)
- [8] J. N. Shadid, E. R. G. Eckert, The mass transfer analogy to heat transfer in fluids with temperature-dependent properties, *American Society of Mechanical Engineers Journal of Turbomachinery* 113 (1991) 27–33. (6), (17)
- [9] S. Han, R. J. Goldstein, Heat transfer study in a linear turbine cascade using thermal boundary layer measurement technique, *American Society of Mechanical Engineers Journal of Heat Transfer* 129 (2007) 1384–1394. (6)
- [10] S. Han, R. J. Goldstein, The heat/mass transfer analogy for a simulated turbine blade, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 51 (2008) 5209–5225. (6)
- [11] S. Han, R. J. Goldstein, The heat/mass transfer analogy for a simulated turbine endwall, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 51 (2008) 3227–3244. (6)

- [12] S. Han, R. J. Goldstein, The heat/mass transfer analogy for a simulated turbine endwall with fillets, American Society of Mechanical Engineers Journal of Heat Transfer 131 (2009) 012001.1–14. (6), (17)
- [13] K. Hong, T.-H. Song, Development of optical naphthalene sublimation method, International Journal of Heat and Mass Transfer 50 (2007) 3890–3898. (7)
- [14] W. Nusselt, Das Grundgesetz des Wärmeüberganges, Gesundheits-Ingenieur, Zeitschrift für die gesamte Städtehygiene 38 (1915) 477–482/490–496. (8), (84), (85)
- [15] L. Rathjen, Experimentelle Wärme- und Stoffübergangsuntersuchung an einem rotierenden Kühlkanalmodell mit Rippen, Dissertation, Technische Universität Darmstadt (2003). (11), (14)
- [16] H. Blasius, Das Ähnlichkeitsgesetz bei Reibungsvorgängen in Flüssigkeiten, Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 131 (1913) 1–40. (12)
- [17] U. Pagenkopf, Experimentelle Untersuchung des Wärmeübergangs an prallgekühlten Oberflächen - Prallkühlung I, Tech. rep., Forschungsvereinigung Verbrennungskraftmaschinen e.V. (1993). (14)
- [18] U. Pagenkopf, Untersuchung der lokalen konvektiven Transportvorgänge auf Prallflächen, Dissertation, Technische Hochschule Darmstadt (1996). (14)
- [19] C. Mattern, Konvektive Stoffübertragung an gekrümmten Prallflächen in einem rotierenden Kühlsystem und deren Analogie zur Wärmeübertragung, Dissertation, Technische Universität Darmstadt (1998). (14), (15)
- [20] H. H. Cho, S. Y. Lee, D. H. Rhee, W.-G. Joo, J. Lee, Effects of rib configurations on heat/mass transfer in a two-pass rotating duct, International Symposium on Transport Phenomena and Dynamics of Rotating Machinery 9. (14)
- [21] Patent US 8,231,349 B2. (14)
- [22] F. Hoefler, S. Schueren, J. von Wolfersdorf, S. Naik, Heat transfer characteristics of an oblique jet impingement configuration in a passage with ribbed surface, American Society of Mechanical Engineers Turbo Expo GT-22288. (15)
- [23] Patent US 6,033,181. (16)
- [24] N. Winter, H.-P. Schiffer, Effect of rotation on the cyclone cooling method - mass transfer measurements, Innerhalb International Symposium on Heat Transfer in Gas Turbine Systems, 2009. (16)
- [25] N. Hay, P. D. West, Heat transfer in free swirling flow in a pipe, American Society of Mechanical Engineers Journal of Heat Transfer (1975) 411–416. (16)

- [26] T. Nasu, Experimentelle Untersuchung des Sublimationsverhaltens von Naphthalinkristallschichten, Master Thesis / Diplomarbeit, Technische Universität Darmstadt (2013). (19)
- [27] T. K. Sherwood, N. E. Cooke, Mass transfer at low pressure, American Institute of Chemical Engineers 3/1 (1957) 37–42. (20)
- [28] M. Kloss, Konstruktion eines Messrotors und der zugehörigen Messstrecken für den Rotationsprüfstand zur Untersuchung der Prall- und Zyklonkühlung, Master Thesis / Diplomarbeit, Technische Universität Darmstadt (2008). (26)
- [29] O. Dössel, Bildgebende Verfahren in der Medizin, Springer Berlin Heidelberg, 2000. (26)
- [30] C. J. Elkins, M. Markl, N. Pelc, J. K. Eaton, 4D Magnetic resonance velocimetry for mean velocity measurements in complex turbulent flows, Experiments in Fluids 34 (2003) 494–503. (26)
- [31] F. Wassermann, S. Grundmann, M. Kloss, H.-P. Schiffer, Swirl flow investigations on the enhancement of heat transfer processes in cyclone cooling ducts, American Society of Mechanical Engineers Turbo EXPO GT2012-69395. (26)
- [32] J. H. Spurk, N. Aksel, Strömungslehre, Einführung in die Theorie der Strömungen, Springer Berlin Heidelberg New York, 2007. (50), (51), (204)
- [33] M. J. S. Monte, L. M. N. B. F. Santos, M. Fulem, J. Fonseca, C. A. D. Sousa, New static apparatus and vapor pressure of reference materials: naphthalene, benzoic acid, benzophenone, and ferrocene, Journal of Chemical Engineering Data 51 (2006) 757–766. (56)
- [34] P. Vimalchand, M. D. Donohue, Thermodynamics of quadrupolar molecules The perturbed-anisotropic chain theory, Industrial and Engineering Chemistry Fundamentals 24 (1985) 246–257. (56)
- [35] Z. Tao, X. Yang, S. Ding, G. Xu, H. Wua, H. Deng, X. Luo, Experimental study of rotation effect on film cooling over the flat wall with a single hole, Experimental Thermal and Fluid Science 32 (2008) 1081–1089. (59)
- [36] D. Hänel, Molekulare Gasdynamik, Springer Berlin Heidelberg, 2004. (61), (71), (76)
- [37] VDI Wärmeatlas, Springer Berlin Heidelberg New York, 2006. (61), (64), (65), (66), (68), (69), (70), (71), (72), (223), (225)
- [38] J. O. Hirschfelder, C. F. Curtiss, R. B. Bird, Molecular Theory of Gases and Liquids, Wiley, 1954. (62), (63), (193), (194), (221), (222)
- [39] VDI Wärmeatlas, Springer Berlin Heidelberg New York, 2002. (65), (66), (68), (69), (70), (71), (72), (225)

- [40] VDI Wärmeatlas, Springer Berlin Heidelberg New York, 1984. (65), (66), (68), (69), (70), (71), (225)
- [41] A. Eucken, Allgemeine Gesetzmäßigkeiten für das Wärmeleitvermögen verschiedener Stoffarten und Aggregatzustände, *Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens* 11 (1940) 6–20. (71)
- [42] C. L. Yaws, *Handbook of Thermal Conductivity, Volume 3, Organic Compounds, C8 to C28*, Gulf Publishing, 1995. (71), (72)
- [43] J. Brandmüller, E. Schmid, Zum Raman-Spektrum von Naphthalin, *Zeitschrift der Physik* 114 (1956) 428–448. (74)
- [44] E. R. Lippincott, E. J. O'Reilly Jr., Vibrational spectra and assignment of naphthalene and naphthalene-d-8, *The Journal of Chemical Physics* 23/2 (1955) 238–244. (74)
- [45] B. Poling, J. Prausnitz, J. O'Connell, *The Properties of Gases and Liquids*, McGraw-Hill, 2001. (77), (223)
- [46] E. N. Fuller, P. D. Schettler, J. C. Giddings, A new method for prediction of binary gas phase diffusion coefficients, *Industrial and Engineering Chemistry* 58 / 5 (1966) 19–27. (77), (223)
- [47] N. H. Chen, D. F. Othmer, New generalized equation for gas diffusion coefficient, *Journal of Chemical and Engineering Data* 7/1 (1962) 37–41. (78), (225)
- [48] E. W. Washburn, C. J. West, C. Hull, *International critical tables of numerical data, physics, chemistry and technology*, 1929. (78), (225)
- [49] L. Caldwell, Diffusion coefficient of naphthalene in air and hydrogen, *Journal of Chemical and Engineering Data* 29 (1984) 62–66. (78), (225)
- [50] E. J. Mack, Average cross-section areas of molecules by gaseous diffusion methods, *Journal of American Chemical Society* 47 (1925) 2468–2482. (78)
- [51] K. Cho, T. F. Irvine, J. Karni, Measurement of the diffusion coefficient of naphthalene into air, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 35 (1992) 957–966. (78), (224)
- [52] E. U. Schlünder, Einfluss molekularer Transportvorgänge auf die Zustandsänderung von Gas/Dampf-Gemischen, *Chem.-Ing.-Tech.* 3 (1963) 169–174. (79)
- [53] P. Polyakov, E. Rossinsky, S. Wiegand, Study of the Soret effect in hydrocarbon chain / aromatic compound mixtures, *The Journal of Physical Chemistry* 113 (2009) 13308–13312. (81)
- [54] B. Metais, E. R. G. Eckert, Forced, mixed and free convection regimes, *American Society of Mechanical Engineers Journal of Heat Transfer* 86/2 (1964) 295–296. (88)

- [55] S. Whitaker, Forced convection heat transfer correlations for flow in pipes, past flat plates, single cylinders, single spheres, and for flow in packed beds and tube bundles, American Institute of Chemical Engineers 18/2 (1972) 361–370. (100)
- [56] E. U. Schlünder, P. Krötzsch, F.-W. Hennecke, Gesetzmäßigkeiten der Wärme- und Stoffübertragung bei der Prallströmung aus Rund- und Schlitzdüsen, Chem.-Ing.-Tech. 6 (1970) 333–338. (100)
- [57] G. W. Sears, Evaporation of naphthalene crystals, Journal of Chemical Physics 37 (1962) 2155–2156. (108), (112)
- [58] H. W. Melville, A note on evaporation from irregular surfaces, Transactions of the Faraday Society 32 (1936) 1017–1020. (109)
- [59] T. K. Sherwood, C. Johannes, The maximum rate of sublimation of solids, American Institute of Chemical Engineers 8/5 (1962) 590–593. (111)
- [60] M. Knudsen, Die maximale Verdampfungsgeschwindigkeit des Quecksilbers, Annalen der Physik 47 (1915) 697–708. (111), (112), (113)
- [61] H. Hertz, Ueber die Verdunstung der Flüssigkeiten, insbesondere des Quecksilbers, im luftleeren Raume, Annalen der Physik und Chemie 17/10 (1882) 177–193. (111)
- [62] W. Kossel, Zur Theorie des Kristallwachstums, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (1927) 135–143. (112), (113)
- [63] I. N. Stranski, Über die Energieschwellen beim Kristallwachstum, Naturwissenschaften 13 (1950) 289–296. (112)
- [64] W. K. Burton, N. Cabrera, F. C. Frank, The growth of crystals and the equilibrium structure of their surfaces, Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences 243 (1951) 299–358. (112)
- [65] G. W. Sears, Evaporation of perfect crystals, Chemical Physics 24/4 (1956) 868–873. (112)
- [66] E. Rideal, P. M. Wiggins, The rates of evaporation from different faces of rhombic sulphur, Proceedings of the Royal Society of London 210/1102 (1952) 291–309. (112), (114)
- [67] N. T. Corke, A. A. Kawada, J. N. Sherwood, Etching of dislocations in crystals of aromatic hydrocarbons, Nature 1 (1967) 62–63. (112)
- [68] J. N. Sherwood, Lattice defects in organic crystals, Molecular crystals and liquid crystals 9/1 (1969) 37–57. (112)

- [69] M. Mercier, M. K. Raimi, L. Bonpunt, Observation by transmission electron microscopy of etch figures obtained on an organic molecular crystal, *Microscopic Research and Technique* 21 (1992) 53–58. (112)
- [70] A. Smakula, M. M. Klein, Investigation of crystal growth by thermal etching and oriented overgrowth, *Chemical Physics* 21/1 (1953) 100–104. (112)
- [71] A. Smakula, *Einkristalle*, Springer-Verlag, 1962. (112)
- [72] R. S. Bradley, T. G. Cleasby, The vapour pressure and lattice energy of some aromatic ring compounds, *Journal of the Chemical Society* 0 (1953) 1690–1692. (113)
- [73] J. S. Chickos, W. E. Acree Jr., Enthalpies of sublimation of organic and organometallic compounds, *Journal of Physical and Chemical Reference Data* 31/2 (2002) 537–698. (113)
- [74] J. Götzen, *Templateeffekte bei der Strukturierung organischer Halbleiterfilme*, Dissertation, Philipps-Universität Marburg (2010). (113), (114), (115)
- [75] K. Ruzicka, M. Fulem, V. Ruzicka, Recommended vapor pressure of solid naphthalene, *Journal of Chemical and Engineering Data* 50 (2005) 1956–1970. (114), (115)
- [76] C. G. De Kruif, T. Kuipers, J. C. Van Miltenburg, R. C. F. Schaake, G. Stevens, The vapour of solid and liquid naphthalene, *Journal of Chemical Thermodynamics* 13 (1981) 1081–1086. (114)
- [77] W. X. Huang, J. M. White, Growth and orientation of naphthalene films on Ag(111), *Journal of Physical Chemistry B* 108 (2004) 5060–5065. (114)
- [78] S. Lukas, S. Vollmer, G. Witte, C. Wöll, Adsorption of acenes on flat and vicinal Cu(111) surfaces: Step induced formation of lateral order, *Journal of Chemical Physics* 114/22 (2001) 10123–10129. (114)
- [79] S.-L. Yau, K. Itaya, Structures and dynamic processes of molecular adlayers on Rh(111) and Pt(111) in HF solution: naphthalene and biphenyl, *Colloids and Surfaces, A: Physicochemical and Engineering Aspects* 134 (1997) 21–30. (114)
- [80] G. Witte, C. Wöll, Growth of aromatic molecules on solid substrates for applications in organic electronics, *Journal of Materials Research* 19/7 (2004) 1889–1916. (114)
- [81] T. Garc ya, B. Solsona, S. H. Taylor, Naphthalene total oxidation over metal oxide catalysts, *Applied Catalysis B: Environmental* 66 (2006) 92–99. (115)
- [82] J.-L. Shie, C.-Y. Chang, J.-H. Chen, W.-T. Tsai, Y.-H. Chen, C.-S. Chiou, C.-F. Chang, Catalytic oxidation of naphthalene using a Pt/Al₂O₃ catalyst, *Applied Catalysis B: Environmental* 58 (2005) 289–297. (115)

- [83] F. J. Varela-Gandia, A. Berenguer-Murcia, D. Lozano-Castello, D. Cazorla-Amoros, D. R. Sellick, S. H. Taylor, Total oxidation of naphthalene using palladium nanoparticles supported on beta, zsm-5, sapo-5 and alumina powders, *Applied Catalysis B: Environmental* 129 (2013) 98–105. (115)
- [84] C. R. Dias, M. F. Portela, G. C. Bond, Synthesis of phthalic anhydride: catalysts, kinetics and reaction modeling, *Catalysis Reviews - Science and Engineering* 39/3 (1997) 169–207. (115)
- [85] C. R. Kinney, I. Pincus, Catalytic air oxidation of higher aromatics to phthalic anhydride, *Journal of Industrial and Engineering Chemistry* 43/12 (1951) 2880–2884. (115)
- [86] C. Conover, H. D. Gibbs, Phthalic anhydride. V - The preparation of phthalic anhydride by the catalysis of the vapor phase reaction between naphthalene and atmospheric air, *Journal of Industrial and Engineering Chemistry* 14/2 (1922) 120–125. (115)
- [87] M. B. Williams, W. P. van Meter, Crystallographic data, 56. Phthalic anhydride, *Analytical Chemistry* 24/5 (1952) 911–912. (115)
- [88] D. A. Crooks, F. M. Feetham, The vapour pressure of phthalic anhydride, *Journal of the Chemical Society* 196 (1946) 899–901. (115)
- [89] S. Schueren, F. Hoefler, J. von Wolfersdorf, S. Naik, Heat transfer in an oblique jet impingement configuration with varying jet geometries, *American Society of Mechanical Engineers Turbo Expo* 135 (2013) 0210101–02101010. (120)
- [90] F. Höfler, Experimental investigations of wall integrated impingement cooling configurations for thermally highly loaded gas turbine blades, *Dissertation, Universität Stuttgart* (2011). (120)
- [91] S. Schulz, S. Schueren, J. von Wolfersdorf, A particle image velocimetry-based investigation of the flow field in oblique jet impingement configuration, *American Society of Mechanical Engineers Journal of Turbomachinery* 136/051009 (2014) 1–10. (125)
- [92] X. Yan, N. Saniei, Heat transfer from an obliquely impinging circular air jet to a flat plate, *International Journal of Heat and Fluid Flow* 18 (1997) 591–599. (131)
- [93] S. Sanwald, J. von Saldern, U. Riedl, C. Schulz, J. Warnatz, J. Wolfrum, *Reactive Flows, Diffusion and Transport*, Springer Berlin Heidelberg, 2006. (151)
- [94] J. von Saldern, *Laserspektroskopische Untersuchungen laminarer Grenzschichten turbulenter Strömungen mit Hilfe molekularer Marker*, Dissertation, Ruprecht-Karls-Universität Heidelberg (2003). (151)
- [95] W. Nusselt, Wärmeübergang, Diffusion und Verdunstung, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 10/2 (1930) 105–121. (196)

- [96] H. Baehr, K. Stephan, Wärme- und Stoffübertragung, Springer Berlin Heidelberg New York, 2006. (198)
- [97] H. Haug, Statistische Physik - Gleichgewichtstheorie und Kinetik, Springer Berlin Heidelberg New York, 2006. (214)
- [98] I. A. Fedorov, Y. N. Zhuravlev, V. P. Berveno, Electronic structure and chemical bond in naphthalene and anthracene, Physical Chemistry Chemical Physics 13 (2011) 5679–5686. (222)
- [99] E. R. Gilliland, Diffusion coefficients in gaseous systems, Journal of Industrial and Engineering Chemistry 26/6 (1934) 681–685. (223)
- [100] A. Mersmann, Stoffübertragung, Springer Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1986. (224)
- [101] R. B. Bird, W. E. Steward, E. N. Lightfoot, Transport Phenomena, Wiley and Sons New York London Sydney, 1960. (224)

A. Daten zu den verwendeten Kühlkanalgeometrien

Eigenschaft	Parameter		
	Akronym	Betrag	Dim.
Hydraulischer u. geometrischer Durchmesser Hauptkanal	d_{hHK}	50,00	mm
Hydraulischer u. geometrischer Durchmesser Filmkühlbohrung	d_{hFKB}	5,00	mm
Hydraulischer Durchmesser Zufuhrkanal	d_{hzu}	4,77	mm
Breite Zufuhrkanal	b_{zu}	12,50	mm
Länge Zufuhrkanal	L_{zu}	58,70	mm
Hydraulische Länge/Durchmesser Filmkühlbohrungen 1 $\phi = 290^\circ$	l_{290} / d_{h290}	3,526	
Hydraulische Länge/Durchmesser Filmkühlbohrungen 2 $\phi = 90^\circ$	l_{90} / d_{h90}	2,500	
Hydraulische Länge/Durchmesser Zufuhrkanal	l_{zu} / d_{hzu}	7,16	
Anzahl der Filmkühlbohrungen pro Reihe	N_{FK_n}	17	
Anzahl der Filmkühlbohrungsreihen	N_{FKB_n}	2	
Teilung beider Filmkühlbohrungsreihen	$P_{FKB.ver}$	4	
Radialer Abstand Zufuhrkanal und 1. Filmkühlbohrung bezogen auf deren Durchmesser	$P_{FK.zu}$	1,76	

Tabelle A.1.: Quantitative geometrische Eigenschaften des Zyklonkühlkanals für Stoffübergangsmessungen

Eigenschaft	Parameter		
	Akronym	Betrag	Dim.
Breite Kanalwand D	W_1	38,5	mm
Breite Kanalwand C	W_2	147,0	mm
Abstand Kanalwand D zu Kanalwand C	H	126,0	mm
Wandwinkel A D	ϕ_{A1}	110,0	°
Wandwinkel A C	ϕ_{A2}	70,0	°
Wandwinkel B D	ϕ_{B1}	116,4	°
Wandwinkel C D	ϕ_{B2}	63,6	°
Hydr. Durchmesser A1	d_{A1}	14,0	mm
Hydr. Durchmesser A2	d_{A2}	14,0	mm
Hydr. Durchmesser B1	d_{B1}	14,0	mm
Hydr. Durchmesser B2	d_{B2}	16,8	mm
Bohrungsposition A1	a_{A1}	19,0	mm
Bohrungsposition A2	a_{A2}	29,4	mm
Bohrungsposition B1	a_{B1}	70,0	mm
Bohrungsposition B2	a_{B2}	35,0	mm
Bohrungsabstand A1	P_{A1}	42,0	mm
Bohrungsabstand A2	P_{A2}	42,0	mm
Bohrungsabstand B1	P_{B1}	42,0	mm
Bohrungsabstand B2	P_{B2}	42,0	mm
Bohrungswinkel A1	α_{A1}	30,0	°
Bohrungswinkel A2	α_{A2}	30,0	°
Bohrungswinkel B1	α_{B1}	90,0	°
Bohrungswinkel B2	α_{B2}	90,0	°
Länge/Durchmesser A1	l_{A1}/d	2,176	
Länge/Durchmesser A2	l_{A2}/d	3,334	
Länge/Durchmesser B1	l_{B1}/d	2,500	
Länge/Durchmesser B2	l_{B2}/d	2,083	
Anzahl der Bohrungen in Reihe A1	N_{A1}	9	
Anzahl der Bohrungen in Reihe A1	N_{A2}	9	
Anzahl der Bohrungen in Reihe B1	N_{B1}	9	
Anzahl der Bohrungen in Reihe B2	N_{B2}	9	

Tabelle A.2.: Quantitative geometrische Eigenschaften des Prallkühlkanals für Stoffübergangsuntersuchungen

B. Boltzmann Transportgleichungen

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int \Phi_X(\zeta) f(\zeta, \mathbf{r}, t) d\zeta + \frac{\partial}{\partial x_i} \int \Phi_X(\zeta) \zeta_i f(\zeta, \mathbf{r}, t) d\zeta + k_i \int \Phi_X(\zeta) \frac{\partial f(\zeta, \mathbf{r}, t)}{\partial \zeta_i} d\zeta}_{\text{Transportterm: } F(\Phi_X(\zeta))} \\
 &= \underbrace{\int \int_{\zeta} \int_{\zeta_a} \int_{A_C} \Phi_X(\zeta) [f(\zeta, \mathbf{r}, t)' f_a'(\zeta_a, \mathbf{r}, t) - f(\zeta, \mathbf{r}, t) f_a(\zeta_a, \mathbf{r}, t)] g dA_C d\zeta_a d\zeta}_{\text{Kollisionsterm: } C} \quad (\text{B.1}) \\
 &= \underbrace{\frac{1}{2} \int \int_{\zeta} \int_{\zeta_a} \int_{A_C} [\Phi_X'(\zeta) + \Phi_{Xa}'(\zeta_a) - \Phi_X(\zeta) - \Phi_{Xa}(\zeta_a)] f(\zeta, \mathbf{r}, t) f_a(\zeta_a, \mathbf{r}, t) g dA_C d\zeta_a d\zeta}_{\text{Kollisionsterm: } C} \quad (\text{B.2})
 \end{aligned}$$

Hierin ist

t	Zeit
$x_i \forall i = 1; 2; 3$	Ortskoordinaten
$\equiv x; y; z$	
$\mathbf{r} = [\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z]$	Ortsvektor bzgl. raumfesten Koordinatensystems
$\boldsymbol{\zeta} = [\zeta_x, \zeta_y, \zeta_z]$	Teilchengeschwindigkeitsvektor bzgl. raumfesten Koordinatensystems
$\mathbf{g} = \boldsymbol{\zeta}_a - \boldsymbol{\zeta}$	Relativgeschwindigkeit zwischen den Teilchen des betrachteten und eines anderen (a) Geschwindigkeitsvolumens
A_C	Stoßfläche
$f(\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{r}, t)$	Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen im betrachteten Orts- und Geschwindigkeitsvolumen
$f_a(\boldsymbol{\zeta}_a, \mathbf{r}, t)$	Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen aus anderem Orts- und Geschwindigkeitsvolumen
$\Phi_X(\boldsymbol{\zeta}), \Phi_{Xa}(\boldsymbol{\zeta}_a)$	Transportgröße vor einem Stoß im betrachteten und anderem (a) Orts- und Geschwindigkeitsvolumen der Größe X
$\Phi_X(\boldsymbol{\zeta})', \Phi_{Xa}'(\boldsymbol{\zeta}_a)$	Transportgröße nach einem Stoß im betrachteten und anderem (a) Orts- und Geschwindigkeitsvolumen der Größe X
k_i	Massenspezifische Kraft, die eine Beschleunigung der Teilchen verursacht
C	Kollisionsterm

Stoßinvarianten Transportgrößen

$$\text{Masse} \quad \Phi_M = m$$

$$\text{Impuls} \quad \Phi_I = m\zeta$$

$$\text{Energie} \quad \Phi_E = \frac{m}{2}\zeta^2$$

B.1. Boltzmann Transportgleichungen eines einkomponentigen Gases

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int \Phi_X(\zeta) f(\zeta) d\zeta + \frac{\partial}{\partial x_i} \int \Phi_X(\zeta) \zeta_i f(\zeta) d\zeta + k_i \int \Phi_X(\zeta) \frac{\partial f(\zeta)}{\partial \zeta_i} d\zeta}_{F(\Phi_X(\zeta))} = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\forall \quad \Phi'_X + \Phi'_{Xa} - \Phi_X - \Phi_{Xa} = 0$$

mit $X = M, I, E$

B.2. Boltzmann Transportgleichungen eines mehrkomponentigen Gases**BTGL einer Gemischkomponente**

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int \Phi_X(\zeta) f_n(\zeta, \mathbf{r}, t) d\zeta + \frac{\partial}{\partial x_i} \int \Phi_X(\zeta) \zeta_i f_n(\zeta, \mathbf{r}, t) d\zeta + k_{n,i} \int \Phi_X(\zeta) \frac{\partial f(\zeta, \mathbf{r}, t)}{\partial \zeta_i} d\zeta}_{\text{Transportterm einer Komponente: } F_n(\Phi_X(\zeta))}$$

$$= \int_{\zeta} \Phi_X(\zeta) \sum_{s=0}^m \int_{\zeta_a} \int_{A_{C,ns}} [f_n(\zeta, \mathbf{r}, t)' f'_{a,s}(\zeta_a, \mathbf{r}, t) - f(\zeta, \mathbf{r}, t) f_a(\zeta_{a,s}, \mathbf{r}, t)] g dA_{C,ns} d\zeta_a d\zeta$$

$$= \int_{\zeta} \Phi_X(\zeta) \underbrace{\int_{\zeta_a} \int_{A_{C,nn}} [f_n(\zeta, \mathbf{r}, t)' f'_{a,n}(\zeta_a, \mathbf{r}, t) - f_n(\zeta, \mathbf{r}, t) f_{a,n}(\zeta_{a,n}, \mathbf{r}, t)] g dA_{C,nn} d\zeta_a}_{C_{nn}} d\zeta +$$

$$\underbrace{\int_{\zeta} \Phi_X(\zeta) \sum_{s=0}^m \int_{s \neq n} \int_{\zeta_a} \int_{A_{C,ns}} [f_n(\zeta, \mathbf{r}, t)' f'_{a,s}(\zeta_a, \mathbf{r}, t) - f(\zeta, \mathbf{r}, t) f_a(\zeta_{a,s}, \mathbf{r}, t)] g dA_{C,ns} d\zeta_a}_{C_{ns}} d\zeta$$

$$= \underbrace{\int \Phi_X(\zeta) C_{nn} d\zeta + \int \Phi_X(\zeta) C_{ns} d\zeta}_{\text{Kollisionsterme der Komponente}} \quad (\text{B.4})$$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int \Phi_X(\zeta) f_n(\zeta, \mathbf{r}, t) d\zeta + \frac{\partial}{\partial x_i} \int \Phi_X(\zeta) \zeta_i f_n(\zeta, \mathbf{r}, t) d\zeta + k_{n,i} \int \Phi_X(\zeta) \frac{\partial f(\zeta, \mathbf{r}, t)}{\partial \zeta_i} d\zeta}_{F_n(\Phi_X(\zeta))} \\
 &= \int \Phi_X(\zeta) C_{ns} d\zeta \quad (B.5) \\
 &\forall \quad \Phi'_X + \Phi'_{Xa} - \Phi_X - \Phi_{Xa} = 0 \quad \text{mit } X = M, I, E
 \end{aligned}$$

BTGI des Gemisches

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{\sum_n \left(\frac{\partial}{\partial t} \int \Phi_X(\zeta) f_n(\zeta, \mathbf{r}, t) d\zeta + \frac{\partial}{\partial x_i} \int \Phi_X(\zeta) \zeta_i f_n(\zeta, \mathbf{r}, t) d\zeta + k_{n,i} \int \Phi_X(\zeta) \frac{\partial f(\zeta, \mathbf{r}, t)}{\partial \zeta_i} d\zeta \right)}_{\text{Transportterm des Gemisches: } F_N(\Phi_X(\zeta))} \\
 &= \underbrace{\sum_n \left(\int \Phi_X(\zeta) C_{nn} d\zeta + \int \Phi_X(\zeta) C_{ns} d\zeta \right)}_{\text{Kollisionsterme des Gemisches}} = 0 \quad (B.6) \\
 &\forall \quad \Phi'_X + \Phi'_{Xa} - \Phi_X - \Phi_{Xa} = 0 \\
 &\text{mit } X = M, I, E
 \end{aligned}$$

C. Momente von Spezies

Um die Momente der BTGI in makroskopischen Größen ausdrücken zu können, werden die Geschwindigkeiten der Teilchen im raumfesten Koordinaten ζ_i aufgeteilt in die makroskopisch messbare mittlere Geschwindigkeit w_i und die Geschwindigkeit der Teilchen relativ zueinander, die thermische Geschwindigkeit c_i nach Gl. C.1.

$$\zeta_i = c_i + w_i \quad (\text{C.1})$$

Die Transportgleichung Gl. B.6 beziehungsweise Gl. B.3 enthält drei, für jede Transportgröße Φ auszuformulierende Terme Gl. C.3, Gl. C.4 und Gl. C.5, die Momente. Diese lassen sich für ein einkomponentiges Fluid und ein Gemisch in ähnlicher Weise finden und werden im Folgenden einzeln aufgeführt. Obwohl die Momente einer Spezies als Komponente eines Gemisches bereits die Momente der Spezies eines einkomponentigen Fluids enthalten, wird für letztere eine eigene Auflistung angegeben.

$$0 = \quad \text{bzw:} \quad \int \Phi C_{ns} d\zeta = \quad (\text{C.2})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \Phi f_n d\zeta \quad (\text{C.3})$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_i} \int \Phi \zeta_i f_n d\zeta \quad (\text{C.4})$$

$$+ k_{n,i} \frac{\partial}{\partial x_i} \int \Phi \frac{\partial f_n}{\partial \zeta_i} d\zeta \quad (\text{C.5})$$

C.1. Momente einer Spezies eines einkomponentigen Fluids und dessen Erhaltungsgleichungen

Die Momente der stoßinvarianten Größen, Masse, Impuls und Energie, der Spezies eines einkomponentigen Fluids werden im Folgenden aufgeführt und in die BTGI eingesetzt, die dann die allgemeine Massen-, Impuls- und Energieerhaltungsgleichung darstellt.

C.1.1. Momente der Masse der Spezies eines einkomponentigen Fluids

$$\begin{aligned} \text{Masse: } \Phi &= m \\ \frac{\partial}{\partial t} \int m f d\zeta &= \frac{\partial}{\partial t} (mn) = \rho \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int m \zeta_i f d\zeta = \frac{\partial}{\partial x_i} \int m c_i \zeta_i f d\zeta + \frac{\partial}{\partial x_i} \int m w_i \zeta_i f d\zeta \quad (\text{C.7})$$

$$\bullet \int m c_i \zeta_i f d\zeta = 0 \quad (\text{C.8})$$

$$\bullet \int m w_i \zeta_i f d\zeta = m w_i n = w_i \rho \quad (\text{C.9})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i \rho) \quad (\text{C.10})$$

$$k_i \frac{\partial}{\partial x_i} \int m \frac{\partial f}{\partial \zeta_i} d\zeta = k_i m \left[[1f]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial 1}{\partial \zeta_i} f d\zeta \right] \quad (\text{C.11})$$

$$= k_i m \left[f(\infty) - f(-\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} 0 f d\zeta \right] \quad (\text{C.12})$$

$$= k_i m [0 - 0 - 0] = 0 \quad (\text{C.13})$$

Die allgemeine Erhaltungsgleichung der Masse der Spezies einkomponentigen Fluids folgt damit zu

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i \rho) \quad (\text{C.14})$$

C.1.2. Momente des Impulses der Spezies eines einkomponentigen Fluids

$$\text{Impuls: } \Phi = m\zeta_j$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int m\zeta_j f d\zeta = \frac{\partial}{\partial t} \int mc_j f d\zeta + \frac{\partial}{\partial t} \int mw_j f d\zeta \quad (\text{C.15})$$

$$\bullet \int mc_j \zeta_i f d\zeta = mn0 = 0 \quad (\text{C.16})$$

$$\bullet \int mw_j \zeta_i f d\zeta = mw_j n = w_j \rho \quad (\text{C.17})$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (w_j \rho) \quad (\text{C.18})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int m\zeta_j \zeta_i f d\zeta = \frac{\partial}{\partial x_i} \int m [c_i + w_i] [c_j + w_j] f d\zeta \quad (\text{C.19})$$

$$\bullet \int mc_j c_i f d\zeta = -\tau_{ij} \quad (\text{C.20})$$

$$\bullet \int mc_i w_j f d\zeta = mn0w_j = 0 \quad (\text{C.21})$$

$$\bullet \int mc_j w_i f d\zeta = mn0w_i = 0 \quad (\text{C.22})$$

$$\bullet \int mw_i w_j f d\zeta = mnw_i w_j = w_i w_j \rho \quad (\text{C.23})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} (-\tau_{ij} + w_i w_j \rho) \quad (\text{C.24})$$

$$k_i \frac{\partial}{\partial x_i} \int m\zeta_j \frac{\partial f}{\partial \zeta_i} d\zeta = k_i m \left[[\zeta_j f]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \zeta_j}{\partial \zeta_i} f d\zeta \right] \quad (\text{C.25})$$

$$= k_i m \left[\infty f(\infty) - (-\infty)f(-\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{ij} f d\zeta \right] \quad (\text{C.26})$$

$$= k_i m [0 + 0 - n\delta_{ij}] = -k_j \rho \quad (\text{C.27})$$

Die allgemeine Erhaltungsgleichung des Impulses der Spezies eines einkomponentigen Fluids folgt damit zu

$$\Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial t} (w_j \rho) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i w_j \rho) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij}) - k_j \rho \quad (\text{C.28})$$

C.1.3. Momente der Energie der Spezies eines einkomponentigen Fluids

$$\text{Energie: } \Phi = \frac{m}{2} \zeta_j \zeta_j$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{m}{2} \zeta_j \zeta_j f d\zeta = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{m}{2} [c_j + w_j] [c_j + w_j] f d\zeta \quad (\text{C.29})$$

$$\bullet \int \frac{m}{2} c_j c_j f d\zeta = m n u = u \rho \quad (\text{C.30})$$

$$\bullet \int \frac{m}{2} c_j w_j f d\zeta = \frac{m}{2} n 0 w_j = 0 \quad (\text{C.31})$$

$$\bullet \int \frac{m}{2} w_j w_j f d\zeta = \frac{m}{2} n w_j w_j = w_j w_j \frac{\rho}{2} \quad (\text{C.32})$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left(u \rho + w_j w_j \frac{\rho}{2} \right) \quad (\text{C.33})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{m}{2} \zeta_j \zeta_j \zeta_i f d\zeta = \frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{m}{2} [c_i + w_i] [c_j + w_j] [c_j + w_j] f d\zeta \quad (\text{C.34})$$

$$\bullet \int \frac{m}{2} c_i c_j c_j f d\zeta = \dot{q}_i \quad (\text{C.35})$$

$$\bullet \int \frac{m}{2} 2 c_i c_j w_j f d\zeta = -w_j \tau_{ij} \quad (\text{C.36})$$

$$\bullet \int \frac{m}{2} c_i w_j w_j f d\zeta = w_j w_j \frac{m}{2} 0 = 0 \quad (\text{C.37})$$

$$\bullet \int \frac{m}{2} w_i c_j c_j f d\zeta = m n u w_i = u w_i \rho \quad (\text{C.38})$$

$$\bullet \int \frac{m}{2} 2 w_i c_j w_j f d\zeta = m n w_i w_j 0 = 0 \quad (\text{C.39})$$

$$\bullet \int \frac{m}{2} 2 w_i w_j w_j f d\zeta = \frac{m}{2} n w_i w_j w_j = w_i w_j w_j \frac{\rho}{2} \quad (\text{C.40})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\dot{q}_i - w_j \tau_{ij} + w_j w_j \frac{\rho}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u w_i \rho + w_i w_j w_j \frac{\rho}{2} \right) \quad (\text{C.41})$$

$$k_i \frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{m}{2} \zeta_j \zeta_j \frac{\partial f}{\partial \zeta_i} d\zeta = k_i \frac{m}{2} \left[[\zeta_j \zeta_j f]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \zeta_i} (\zeta_j \zeta_j) f d\zeta \right] \quad (\text{C.42})$$

$$= k_i \frac{m}{2} \left[\infty \infty f(\infty) - [-\infty] [-\infty] f(-\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} 2 \delta_{ij} \zeta_i f d\zeta \right] \quad (\text{C.43})$$

$$= k_i \frac{m}{2} \left[0 - 0 - \int_{-\infty}^{\infty} 2\delta_{ij} [c_j + w_j] f d\zeta \right] \quad (\text{C.44})$$

$$= k_i \frac{m}{2} [-2\delta_{ij} n_0 - 2\delta_{ij} n w_j] \quad (\text{C.45})$$

$$= -k_j w_j \rho \quad (\text{C.46})$$

Die allgemeine Erhaltungsgleichung der Energie der Spezies eines einkomponentigen Fluids folgt damit zu

$$\begin{aligned} \Rightarrow 0 &= \frac{\partial}{\partial t} (u\rho) + \frac{\partial}{\partial t} \left(w_j w_j \frac{\rho}{2} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i u \rho) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(w_i w_j w_j \frac{\rho}{2} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{q}_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} (w_j \tau_{ij}) - k_j w_j \rho \end{aligned} \quad (\text{C.47})$$

C.2. Momente einer Spezies als Gemischkomponente und deren Erhaltungsgleichungen

Die Momente der stoßinvarianten Größen, Masse, Impuls und Energie, einer Spezies als Komponente eines Gemisches werden im Folgenden aufgeführt und in die BTGL eingesetzt, die dann die allgemeine Massen-, Impuls- und Energieerhaltungsgleichung darstellt.

C.2.1. Momente der Masse einer Spezies als Gemischkomponente

$$\begin{aligned} \text{Masse: } \Phi &= m_n \\ \frac{\partial}{\partial t} \int m_n f_n d\zeta &= \frac{\partial}{\partial t} (m_n n_n) = \rho_n \end{aligned} \quad (\text{C.48})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int m_n \zeta_i f_n d\zeta = \frac{\partial}{\partial x_i} \int m_n c_i \zeta_i f_n d\zeta + \frac{\partial}{\partial x_i} \int m_n w_i \zeta_i f_n d\zeta \quad (\text{C.49})$$

$$\bullet \int m_n c_i \zeta_i f_n d\zeta = m_n w_{\text{diff}_{n,i}} n_n = w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n \quad (\text{C.50})$$

$$\bullet \int m_n w_i \zeta_i f_n d\zeta = m_n w_i n_n = w_i \rho_n \quad (\text{C.51})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i \rho_n) \quad (\text{C.52})$$

$$k_{n,i} \frac{\partial}{\partial x_i} \int m_n \frac{\partial f_n}{\partial \zeta_i} d\zeta = k_{n,i} m_n \left[[1 f_n]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial 1}{\partial \zeta_i} f_n d\zeta \right] \quad (\text{C.53})$$

$$= k_{n,i} m_n \left[f_n(\infty) - f_n(-\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} 0 f_n d\zeta \right] \quad (\text{C.54})$$

$$= k_{n,i} m_n [0 - 0 - 0] = 0 \quad (\text{C.55})$$

Die allgemeine Erhaltungsgleichung der Masse einer Spezies als Gemischkomponente folgt damit zu

$$\Rightarrow \int m_n C_{ns} d\zeta = \frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i \rho_n) \quad (\text{C.56})$$

C.2.2. Momente des Impulses einer Spezies als Gemischkomponente

$$\begin{aligned} \text{Impuls: } \Phi &= m_n \zeta_j \\ \frac{\partial}{\partial t} \int m_n \zeta_j f_n d\zeta &= \frac{\partial}{\partial t} \int m_n c_j f_n d\zeta + \frac{\partial}{\partial t} \int m_n w_j f_n d\zeta \end{aligned} \quad (\text{C.57})$$

$$\bullet \int m_n c_j \zeta_i f_n d\zeta = m_n w_{\text{diff}_{n,j}} n_n = w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n \quad (\text{C.58})$$

$$\bullet \int m_n w_j \zeta_i f_n d\zeta = m_n w_j n_n = w_j \rho_n \quad (\text{C.59})$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) + \frac{\partial}{\partial t} (w_j \rho_n) \quad (\text{C.60})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int m_n \zeta_j \zeta_i f_n d\zeta = \frac{\partial}{\partial x_i} \int m_n [c_i + w_i] [c_j + w_j] f_n d\zeta \quad (\text{C.61})$$

$$\bullet \int m_n c_i c_j f_n d\zeta = -\tau_{n,ij} \quad (\text{C.62})$$

$$\bullet \int m_n c_i w_j f_n d\zeta = m_n n_n w_{\text{diff}_{n,i}} w_j = w_{\text{diff}_{n,i}} w_j \rho_n \quad (\text{C.63})$$

$$\bullet \int m_n c_j w_i f_n d\zeta = m_n n_n w_{\text{diff}_{n,j}} w_i = w_{\text{diff}_{n,j}} w_i \rho_n \quad (\text{C.64})$$

$$\bullet \int m_n w_i w_j f_n d\zeta = m_n n_n w_i w_j = w_i w_j \rho_n \quad (\text{C.65})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\tau_{n,ij} + w_{\text{diff}_{n,i}} w_j \rho_n + w_{\text{diff}_{n,j}} w_i \rho_n + w_i w_j \rho_n \right) \quad (\text{C.66})$$

$$k_{n,i} \frac{\partial}{\partial x_i} \int m_n \zeta_j \frac{\partial f_n}{\partial \zeta_i} d\zeta = k_{n,i} m_n \left[[\zeta_j f_n]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \zeta_j}{\partial \zeta_i} f_n d\zeta \right] \quad (\text{C.67})$$

$$= k_{n,i} m_n \left[\infty f_n(\infty) - (-\infty) f_n(-\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{ij} f_n d\zeta \right] \quad (\text{C.68})$$

$$= k_{n,i} m_n [0 + 0 - n_n \delta_{ij}] = -k_{n,j} \rho_n \quad (\text{C.69})$$

Die allgemeine Erhaltungsgleichung des Impulses einer Spezies als Gemischkomponente folgt damit zu

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int m_n \zeta_j C_{ns} d\zeta &= \frac{\partial}{\partial t} (w_j \rho_n) + \frac{\partial}{\partial t} (w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{n,ij}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} w_j \rho_n) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,j}} w_i \rho_n) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i w_j \rho_n) \\ &- k_{n,j} \rho_n \end{aligned} \quad (\text{C.70})$$

C.2.3. Momente der Energie einer Spezies als Gemischkomponente

$$\text{Energie: } \Phi = \frac{m_n}{2} \zeta_j \zeta_j$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{m_n}{2} \zeta_j \zeta_j f_n d\zeta = \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{m_n}{2} [c_j + w_j] [c_j + w_j] f_n d\zeta \quad (\text{C.71})$$

$$\bullet \int \frac{m_n}{2} c_j c_j f_n d\zeta = m_n n_n u_n = u_n \rho_n \quad (\text{C.72})$$

$$\bullet \int \frac{m_n}{2} c_j w_j f_n d\zeta = \frac{m_n}{2} n_n w_{\text{diff},n,j} w_j = w_{\text{diff},n,j} w_j \frac{\rho_n}{2} \quad (\text{C.73})$$

$$\bullet \int \frac{m_n}{2} w_j w_j f_n d\zeta = \frac{m_n}{2} n_n w_j w_j = w_j w_j \frac{\rho_n}{2} \quad (\text{C.74})$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} \left(u \rho_n + 2 w_{\text{diff},n,j} w_j \frac{\rho_n}{2} + w_j w_j \frac{\rho_n}{2} \right) \quad (\text{C.75})$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{m_n}{2} \zeta_j \zeta_j \zeta_i f_n d\zeta = \frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{m_n}{2} [c_i + w_i] [c_j + w_j] [c_j + w_j] f_n d\zeta \quad (\text{C.76})$$

$$\bullet \int \frac{m_n}{2} c_i c_j c_j f_n d\zeta = \dot{q}_{n,i} \quad (\text{C.77})$$

$$\bullet \int \frac{m_n}{2} 2 c_i c_j w_j f_n d\zeta = -w_j \tau_{n,ij} \quad (\text{C.78})$$

$$\bullet \int \frac{m_n}{2} c_i w_j w_j f_n d\zeta = w_j w_j \frac{m_n}{2} w_{\text{diff},n,i} = w_j w_j w_{\text{diff},n,i} \frac{\rho_n}{2} \quad (\text{C.79})$$

$$\bullet \int \frac{m_n}{2} w_i c_j c_j f_n d\zeta = m_n n_n u_n w_i = u_n w_i \rho_n \quad (\text{C.80})$$

$$\bullet \int \frac{m_n}{2} 2 w_i c_j w_j f_n d\zeta = m_n n_n w_i w_j w_{\text{diff},n,j} = w_i w_j w_{\text{diff},n,j} \rho_n \quad (\text{C.81})$$

$$\bullet \int \frac{m_n}{2} w_i w_j w_j f_n d\zeta = \frac{m_n}{2} n_n w_i w_j w_j = w_i w_j w_j \frac{\rho_n}{2} \quad (\text{C.82})$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\dot{q}_{n,i} - w_j \tau_{n,ij} + w_j w_j w_{\text{diff},n,i} \frac{\rho_n}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(w_i u \rho_n + w_i w_j w_{\text{diff},n,j} \rho_n + w_i w_j w_j \frac{\rho_n}{2} \right) \quad (\text{C.83})$$

$$k_{n,i} \frac{\partial}{\partial x_i} \int \frac{m_n}{2} \zeta_j \zeta_j \frac{\partial f_n}{\partial \zeta_i} d\zeta = k_{n,i} \frac{m_n}{2} \left[[\zeta_j \zeta_j f_n]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \zeta_i} (\zeta_j \zeta_j) f_n d\zeta \right] \quad (\text{C.84})$$

$$= k_{n,i} \frac{m_n}{2} \left[\infty \infty f_n(\infty) - [-\infty] [-\infty] f_n(-\infty) - \int_{-\infty}^{\infty} 2 \delta_{ij} \zeta_i f_n d\zeta \right] \quad (\text{C.85})$$

$$= k_{n,i} \frac{m_n}{2} \left[0 - 0 - \int_{-\infty}^{\infty} 2\delta_{ij} [c_j + w_j] f_n d\zeta \right] \quad (\text{C.86})$$

$$= k_{n,i} \frac{m_n}{2} \left[-2\delta_{ij} n_n w_{\text{diff}_{n,j}} - 2\delta_{ij} n_n w_j \right] \quad (\text{C.87})$$

$$= -k_{n,j} [w_{\text{diff}_{n,j}} + w_j] \rho_n \quad (\text{C.88})$$

Die allgemeine Erhaltungsgleichung der Energie einer Spezies als Gemischkomponente folgt damit zu

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{m_n}{2} \zeta_j \zeta_j C_{ns} d\zeta &= \frac{\partial}{\partial t} (u_n \rho_n) + \frac{\partial}{\partial t} (w_{\text{diff}_{n,j}} w_j \rho_n) + \frac{\partial}{\partial t} (w_j w_j \frac{\rho_n}{2}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i u_n \rho_n) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i w_j w_j \frac{\rho_n}{2}) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} w_j w_j \frac{\rho_n}{2}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i w_j w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{q}_{n,i}) - \frac{\partial}{\partial x_i} (w_j \tau_{n,ij}) - k_{n,j} [w_{\text{diff}_{n,j}} + w_j] \rho_n \end{aligned} \quad (\text{C.89})$$

C.2.4. Produktionsterme des Gemisches

$$\int m_n C_{ns} d\zeta = \dot{\Gamma}_n \quad (\text{C.90})$$

$$\int m_n \zeta_j C_{ns} d\zeta = \dot{\Gamma}_n w_n \quad (\text{C.91})$$

$$\frac{m_n}{2} \int |\zeta_j|^2 C_{ns} d\zeta = \dot{\Gamma}_n \frac{w_n^2}{2} \quad (\text{C.92})$$

D. Allgemeine Erhaltungsgleichungen

Allgemeine Erhaltungsgleichungen eines einkomponentigen Gases

$$0 = F(\Phi_M(\zeta)) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i \rho) \quad (D.1)$$

$$0 = F(\Phi_I(\zeta)) = \frac{\partial}{\partial t} (w_j \rho) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i w_j \rho) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij}) - k_j \rho \quad (D.2)$$

$$\begin{aligned} 0 = F(\Phi_E(\zeta)) &= \frac{\partial}{\partial t} (u \rho) + \frac{\partial}{\partial t} \left(w_j w_j \frac{\rho}{2} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i u \rho) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(w_i w_j w_j \frac{\rho}{2} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{q}_i) - \frac{\partial}{\partial x_i} (w_j \tau_{ij}) - k_j w_j \rho \end{aligned} \quad (D.3)$$

Allgemeine Erhaltungsgleichungen eines mehrkomponentigen Gases

$$\begin{aligned} \text{Masse:} \quad & \int m_n C_{ns} d\zeta = F_n(\Phi_M(\zeta)) = \\ \dot{\Gamma}_n &= \frac{\partial \rho_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff},n,i} \rho_n) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i \rho_n) \end{aligned} \quad (D.4)$$

$$\begin{aligned} \text{Impuls:} \quad & \int m_n \zeta_j C_{ns} d\zeta = F_n(\Phi_I(\zeta)) = \\ \dot{\Gamma}_n w_n &= \frac{\partial}{\partial t} (w_j \rho_n) + \frac{\partial}{\partial t} (w_{\text{diff},n,j} \rho_n) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff},n,i} w_j \rho_n) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff},n,j} w_i \rho_n) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i w_j \rho_n) \\ &- \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{n,ij}) \\ &- k_{n,j} \rho_n \end{aligned} \quad (D.5)$$

$$\begin{aligned} \text{Energie:} \quad & \frac{m_n}{2} \int |\zeta_j|^2 C_{ns} d\zeta = F_n(\Phi_E(\zeta)) = \\ \dot{\Gamma}_n \frac{w_n^2}{2} &= \frac{\partial}{\partial t} (u_n \rho_n) + \frac{\partial}{\partial t} \left(w_j w_j \frac{\rho_n}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial t} (w_{\text{diff},n,j} w_j \rho_n) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i u_n \rho_n) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(w_i w_j w_j \frac{\rho_n}{2} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff},n,i} w_j w_j \frac{\rho_n}{2}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i w_j w_{\text{diff},n,j} \rho_n) \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{q}_{n,i}) - \frac{\partial}{\partial x_i} (w_j \tau_{n,ij}) - k_{n,j} [w_{\text{diff},n,j} + w_j] \rho_n \end{aligned} \quad (D.6)$$

$$w_n = w + w_{\text{diff}} \quad (\text{D.7})$$

$$\sum_{s=1}^m \dot{\Gamma}_n = \sum_{s=1}^m (\dot{\Gamma}_n w_n) = \sum_{s=1}^m \left(\dot{\Gamma}_n \frac{w_n^2}{2} \right) = 0 \quad (\text{D.8})$$

$$\begin{aligned}
 \text{Masse:} \quad & \sum_{s=1}^m \left(\int m_n(\zeta) C_{nn} d\zeta + \int m_n(\zeta) C_{ns} d\zeta \right) = F(\Phi_M(\zeta)) = \\
 0 = & \frac{\partial}{\partial t} (\rho) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i \rho) + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \right) \quad (\text{D.9})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Impuls:} \quad & \sum_{s=1}^m \left(\int m_n \zeta_j(\zeta) C_{nn} d\zeta + \int m_n \zeta_j(\zeta) C_{ns} d\zeta \right) = F(\Phi_I(\zeta)) = \\
 0 = & \frac{\partial}{\partial t} (w_j \rho) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i w_j \rho) + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} (w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) \right) \\
 & + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left([w_{\text{diff}_{n,i}} w_j + w_{\text{diff}_{n,j}} w_i] \rho_n \right) \right) \\
 & - \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{n,ij}) \right) \\
 & - \sum_{s=1}^m (k_{n,j} \rho_n) \quad (\text{D.10})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Energie:} \quad & \sum_{s=1}^m \left(\int m_n \zeta_j \zeta_j(\zeta) C_{nn} d\zeta + \int m_n \zeta_j \zeta_j(\zeta) C_{ns} d\zeta \right) = F(\Phi_E(\zeta)) = \\
 0 = & \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} (u_n \rho_n) \right) + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} (w_j w_j \frac{\rho_n}{2}) \right) + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} (w_j w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) \right) \\
 & + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (u_n \rho_n w_i) \right) + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\rho_n}{2} w_j w_j [w_{\text{diff}_{n,i}} + w_i] \right) \right) \\
 & + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (w_i w_j w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) \right) \\
 & - \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (w_j \tau_{n,ij}) \right) \\
 & - \sum_{s=1}^m (k_{n,j} \rho_n [w_j + w_{\text{diff}_{n,j}}]) \\
 & - \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{q}_{n,i}) \right) \quad (\text{D.11})
 \end{aligned}$$

Masse: $m-1$ Erhaltungsgleichungen

$$\dot{\Gamma}_n = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_n) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i \rho_n) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} [1; m-1] \quad (\text{D.12})$$

E. Äquivalenz der massengemittelten Geschwindigkeit

$$w_i = \frac{1}{\rho} \sum_{s=1}^m (\rho_n w_{n,i}) \quad (\text{E.1})$$

$$w_{n,i} = w_i - w_{\text{diff}_{n,i}} \quad (\text{E.2})$$

$$w_i \rho = \sum_{s=1}^m (\rho_n w_{n,i}) = \sum_{s=1}^m (\rho_n w_i) \quad \forall \quad w_{n,i} = w_i \quad (\text{E.3})$$

$$\Rightarrow \sum_{s=1}^m (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) = \sum_{s=1}^m j_{s,i}^* = 0 \quad (\text{E.4})$$

F. Kopplung der allgemeinen Erhaltungsgleichungen

Die Kopplung der allgemeinen Erhaltungsgleichungen werden im Folgenden sowohl für das Gemisch, als auch für das einkomponentige Fluid getrennt dargestellt.

F.1. Kopplung der allgemeinen Erhaltungsgleichungen eines einkomponentigen Fluids

Allgemeine Massenerhaltung eines einkomponentigen Fluids entspricht Gl. D.1=Gl. C.14

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i \rho) \quad (\text{F.1})$$

Allgemeine Impulserhaltung eines einkomponentigen Fluids entspricht Gl. D.2=Gl. C.28

$$0 = w_j \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial w_j}{\partial t} \rho + w_j \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i \rho) + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} w_i \rho - \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij}) - k_j \rho \quad (\text{F.2})$$

Gekoppelte Impulserhaltung eines einkomponentigen Fluids

$$\frac{\partial w_j}{\partial t} \rho + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} w_i \rho = \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij}) + k_j \rho \quad (\text{F.3})$$

Allgemeine Energieerhaltung eines einkomponentigen Fluids entspricht Gl. D.3=Gl. C.47

$$\begin{aligned} 0 = & \frac{\partial}{\partial t} (u \rho) + \frac{\partial}{\partial t} \left(w_j w_j \frac{\rho}{2} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i u \rho) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(w_i w_j w_j \frac{\rho}{2} \right) \\ & - w_j \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij}) - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \tau_{ij} - w_j k_j \rho + \frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{q}_i) \end{aligned} \quad (\text{F.4})$$

Gekoppelte Energieerhaltung eines einkomponentigen Fluids

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + w_i \rho \frac{\partial u}{\partial x_i} = \tau_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{q}_i) \quad (\text{F.5})$$

F.2. Kopplung der allgemeinen Erhaltungsgleichungen eines Gemisches

Annahme von inerten Komponenten

$$\dot{\Gamma}_n \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{F.6})$$

Allgemeine Massenerhaltung eines Gemisches entspricht Gl. D.9

$$\sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\rho) - \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i \rho) \quad (\text{F.7})$$

Allgemeine Massenerhaltung einer Komponente eines Gemisches entspricht Gl. D.12 bei einer Produktionsrate von $\dot{\Gamma}_n = 0$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} (\rho_n) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i \rho_n) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \quad \forall n \in [1; m-1] \quad (\text{F.8})$$

Gekoppelte Massenerhaltung einer Komponente eines Gemisches mit der Einführung des Massenanteils $\xi_n = \frac{\partial \rho_n}{\partial \rho}$

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} (\xi_n \rho) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i \xi_n \rho) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \quad \forall n \in [1; m-1] \quad (\text{F.9})$$

$$\begin{aligned} &= \xi_n \frac{\partial}{\partial t} (\rho) + \xi_n \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i \rho) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \\ &\quad + \rho \frac{\partial}{\partial t} (\xi_n) + w_i \rho \frac{\partial}{\partial x_i} (\xi_n) \end{aligned} \quad (\text{F.10})$$

$$\begin{aligned} &= -\xi_n \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \\ &\quad + \rho \frac{\partial}{\partial t} (\xi_n) + w_i \rho \frac{\partial}{\partial x_i} (\xi_n) \end{aligned} \quad (\text{F.11})$$

Allgemeine Impulserhaltung eines Gemisches entspricht Gl. D.10

$$\begin{aligned} 0 &= w_j \frac{\partial}{\partial t} (\rho) + \rho \frac{\partial w_j}{\partial t} + w_j \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i \rho) + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} w_i \rho + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} (w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) \right) \\ &\quad + w_j \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \right) + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \sum_{s=1}^m (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \\ &\quad + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,j}} w_i \rho_n) \right) - \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{n,ij}) \right) - \sum_{s=1}^m (k_{n,j} \rho_n) \end{aligned} \quad (\text{F.12})$$

Gekoppelte Impulserhaltung eines Gemisches

$$\begin{aligned} & \rho \frac{\partial w_j}{\partial t} + w_i \rho \frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} (w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) \right) \\ & + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \sum_{s=1}^m (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,j}} w_i \rho_n) \right) = \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{n,ij}) \right) + \sum_{s=1}^m (k_{n,j} \rho_n) \end{aligned} \quad (\text{F.13})$$

Allgemeine Energieerhaltung eines Gemisches entspricht Gl. D.11

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} (u_n \rho_n) \right) + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} (w_j w_j \frac{\rho_n}{2}) \right) \\ &+ w_j \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} (w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) \right) + \frac{\partial w_j}{\partial t} \sum_{s=1}^m (w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) \\ &+ \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (u_n \rho_n w_i) \right) + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\rho_n}{2} w_j w_j [w_{\text{diff}_{n,i}} + w_i] \right) \right) \\ &+ w_j \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (w_i w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) \right) + w_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \sum_{s=1}^m (w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) \\ &- w_j \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{n,ij}) \right) - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \sum_{s=1}^m (\tau_{n,ij}) \\ &- w_j \sum_{s=1}^m (k_{n,j} \rho_n) - \sum_{s=1}^m (k_{n,j} \rho_n w_{\text{diff}_{n,j}}) \\ &+ \sum_{s=1}^m (\dot{q}_{n,i}) \end{aligned} \quad (\text{F.14})$$

$$\text{mit: } \rho = \sum_{s=1}^m \rho_n \quad (\text{F.15})$$

$$(\text{F.16})$$

Gekoppelte Energieerhaltung eines Gemisches

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + w_i \rho \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{s=1}^m \left(u_n \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \right) \\ &- \sum_{s=1}^m (w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) \left[\frac{\partial w_j}{\partial t} + w_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right] \\ &+ \sum_{s=1}^m (w_{\text{diff}_{n,j}} k_{n,j} \rho_n) + \sum_{s=1}^m (\tau_{n,ij}) \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \\ &- \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{q}_{n,i}) \right) \end{aligned} \quad (\text{F.17})$$

F.3. Gekoppelte Erhaltungsgleichungen

Heißgas-System

$$\begin{array}{c} \text{Masse} \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \end{array} \quad (\text{F.18})$$

$$\begin{array}{c} \text{Impuls} \\ \rho \frac{Dw_j}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij}) + k_{ij}\rho \end{array} \quad (\text{F.19})$$

$$\begin{array}{c} \text{Energie} \\ \rho \frac{Du}{Dt} = \tau_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{q}_i) \end{array} \quad (\text{F.20})$$

Stoff-System

$$\begin{array}{c} \text{Masse} \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{mit} \quad \rho = \rho_a + \rho_b \end{array} \quad (\text{F.21})$$

$$\begin{array}{c} \text{Massen} \\ \rho \frac{D\zeta_a}{Dt} = - \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{a,i}} \rho_a) \end{array} \quad (\text{F.22})$$

$$\begin{array}{c} \rho \frac{D\zeta_b}{Dt} = - \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{b,i}} \rho_b) \end{array} \quad (\text{F.23})$$

$$\begin{array}{c} \text{Impuls} \\ \rho \frac{Dw_j}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{a,ij}) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{b,ij}) + k_{a,j}\rho_a + k_{b,j}\rho_b \end{array} \quad (\text{F.24})$$

$$\begin{array}{c} \text{Energie} \\ \rho \frac{Du}{Dt} = u_a \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{a,i}} \rho_a) + u_b \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{b,i}} \rho_b) \\ \quad w_{\text{diff}_{a,j}} k_{a,j} \rho_a + w_{\text{diff}_{b,j}} k_{b,j} \rho_b \\ \quad + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \tau_{a,ij} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \tau_{b,ij} \\ \quad - \frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{q}_{a,i}) - \frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{q}_{b,i}) \end{array} \quad (\text{F.25})$$

G. Umformung der gekoppelten Erhaltungsgleichungen

Die gekoppelten Erhaltungsgleichungen werden im Folgenden sowohl für das Gemisch, als auch für das einkomponentige Fluid getrennt mittels des materiellen Differentials Gl. G.1 umgeformt.

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + w_i \frac{\partial s}{\partial x_i} \quad (\text{G.1})$$

G.1. Umformung der gekoppelten Erhaltungsgleichungen eines einkomponentigen Fluids

Die gekoppelten Erhaltungsgleichungen des einkomponentigen Fluids werden im Folgenden mit dem materiellen Differential umgeformt.

Allgemeine Massenerhaltung eines einkomponentigen Fluids entspricht Gl. F.1

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_i \rho) \\ 0 &= \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

Gekoppelte Impulserhaltung eines einkomponentigen Fluids entspricht Gl. F.3

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_j}{\partial t} \rho + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} w_i \rho &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij}) + k_j \rho \\ \rho \frac{Dw_j}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij}) + k_j \rho \end{aligned} \quad (\text{G.3})$$

Gekoppelte Energieerhaltung eines einkomponentigen Fluids entspricht Gl. F.5

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u}{\partial t} + w_i \rho \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \tau_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{q}_i) \\ \rho \frac{Du}{Dt} &= \tau_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{q}_i) \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

G.2. Umformung der gekoppelten Erhaltungsgleichungen eines Gemisches

Die gekoppelten Erhaltungsgleichungen werden im Folgenden mit dem materiellen Differential umgeformt.

Allgemeine Massenerhaltung eines Gemisches entspricht Gl. F.7

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho) + \frac{\partial}{\partial x_i}(w_i \rho) &= - \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \right) \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial w_i}{\partial x_i} &= - \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \right)\end{aligned}\quad (\text{G.5})$$

Gekoppelte Massenerhaltung einer Komponente eines Gemisches entspricht Gl. F.9

$$\begin{aligned}0 &= -\xi_n \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \\ &\quad + \rho \frac{\partial}{\partial t} (\xi_n) + w_i \rho \frac{\partial}{\partial x_i} (\xi_n)\end{aligned}\quad (\text{G.6})$$

$$\rho \frac{D\xi_n}{Dt} = \xi_n \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \quad \forall n \in [1; m-1]$$

(G.7)

Gekoppelte Impulserhaltung eines Gemisches entspricht Gl. F.13

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial w_j}{\partial t} + w_i \rho \frac{\partial w_j}{\partial x_i} &= - \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial t} (w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) \right) - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \sum_{s=1}^m (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \\ &\quad - w_i \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) \right) - \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \sum_{s=1}^m (w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) \\ &\quad + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{n,ij}) \right) + \sum_{s=1}^m (k_{n,j} \rho_n) \\ \rho \frac{Dw_j}{Dt} &= - \sum_{s=1}^m \left(\frac{D}{Dt} (w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) \right) \\ &\quad - \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \sum_{s=1}^m (w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \sum_{s=1}^m (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \\ &\quad + \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{n,ij}) \right) + \sum_{s=1}^m (k_{n,j} \rho_n)\end{aligned}\quad (\text{G.8})$$

Gekoppelte Energieerhaltung eines Gemisches entspricht Gl. F.17

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{\partial u}{\partial t} + w_i \rho \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \sum_{s=1}^m \left(u_n \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \right) \\
 &\quad - \sum_{s=1}^m \left(w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n \right) \left[\frac{\partial w_j}{\partial t} + w_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right] \\
 &\quad + \sum_{s=1}^m \left(w_{\text{diff}_{n,j}} k_{n,j} \rho_n \right) + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \sum_{s=1}^m (\tau_{n,ij}) \\
 &\quad - \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{q}_{n,i}) \right) \\
 \rho \frac{Du}{Dt} &= \sum_{s=1}^m \left(u_n \frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \right) \\
 &\quad - \frac{Dw_j}{Dt} \sum_{s=1}^m (w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) \\
 &\quad + \sum_{s=1}^m \left(w_{\text{diff}_{n,j}} k_{n,j} \rho_n \right) + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \sum_{s=1}^m (\tau_{n,ij}) \\
 &\quad - \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{q}_{n,i}) \right) \tag{G.9}
 \end{aligned}$$

G.3. Erhaltungsgleichung der Diffusionsmassenströme

Damit die massengemittelte Geschwindigkeit des Gemisches die Diffusionsgeschwindigkeiten beinhaltet, muss die Erhaltungsgleichung der Diffusionsmassenströme Gl. E.4 erfüllt sein, wodurch sich die nachfolgend aufgelisteten Terme aus den Erhaltungsgleichungen herauskürzen lassen.

$$\begin{aligned}
 0 &= \sum_{s=1}^m (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \\
 \Rightarrow 0 &= - \sum_{s=1}^m \left(\frac{D}{Dt} (w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) \right) \tag{G.10}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 = - \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \sum_{s=1}^m (w_{\text{diff}_{n,j}} \rho_n) \tag{G.11}$$

$$\Rightarrow 0 = - \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \sum_{s=1}^m (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \tag{G.12}$$

$$\Rightarrow 0 = \tilde{\zeta}_n \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (w_{\text{diff}_{n,i}} \rho_n) \right) \tag{G.13}$$

G.4. Bedingungen zur Entsprechung der gekoppelten Erhaltungsgleichungen eines Gemisches und der eines einkomponentigen Fluids

Die in Kap. G.2 angegebenen gekoppelten Erhaltungsgleichungen des Gemisches entsprechen denen des einkomponentigen Fluids Kap. G.1, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind.

Superponierbarkeit der Spannungen was durch Gl. G.14 ausgedrückt wird.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{ij}) = \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\tau_{n,ij}) \right) \quad (\text{G.14})$$

Massenwichtbarkeit der Massenkräfte was durch Gl. G.15 ausgedrückt wird.

$$k_j \rho = \sum_{s=1}^m (k_{n,j} \rho_n) \quad (\text{G.15})$$

Superponierbarkeit der Wärmeströme was durch Gl. G.16 ausgedrückt wird.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{q}_i) = \sum_{s=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{q}_{n,i}) \right) \quad (\text{G.16})$$

H. Materialgleichungen von Gasen

Die gekoppelten Erhaltungsgleichungen eines einkomponentigen Gases Gl. F.18 bis Gl. F.20, sowie eines mehrkomponentigen Gases Gl. F.21 bis Gl. F.25 beinhalten vier Größen, die Diffusionsgeschwindigkeit $w_{\text{diff},n,i}$, die Spannung $\tau_{n,ij}$, die innere Energie u , sowie die Wärmeleitung \dot{q}_i , die noch nicht durch makroskopisch erfassbare Größen beschrieben sind. Die SAM setzt jedoch nur makroskopisch beschreibbare Größen voraus. Ein praktikabler Weg, die Diffusionsgeschwindigkeit, die Spannungen, die innere Energie sowie die Wärmeleitung mit erfassbaren Größen zu beschreiben, sind postulierte analytische Ansätze, die Materialgleichungen. Für die innere Energie und für die Kopplung der in den Materialgleichungen auftretenden makroskopischen Größen, Temperatur, Druck und Massendichte, werden dann weitere Materialgleichungen postuliert, die Zustandsgleichungen.

H.1. Bestimmung der Spannung

Die Spannungen $\tau_{n,ij}$, welche in den Gleichungen zur Erhaltung des Impulses und der Energie sowohl beim ein- als auch bei mehrkomponentigem Gas auftreten, sie sind also für Heißgas- und Stoffsystem relevant, werden üblicherweise nach Gl. H.1 zerlegt in Normalspannungen $\tilde{p}\delta_{ij}$ und Schubspannung $\hat{\tau}_{ij}$. Ebenso lässt sich die Spannung aufteilen in jene, die von außen auf das Gas aufgeprägt wird $p\delta_{ij}$ sowie in jene die im inneren σ_{ij} herrscht und durch Verzerrung hervorgerufen wird.

$$\begin{aligned}\tau_{ij} &= \hat{\tau}_{ij} - \tilde{p}\delta_{ij} \\ &= \sigma_{ij} - p\delta_{ij}\end{aligned}\tag{H.1}$$

Ein Ansatz zur Beschreibung der inneren Normal- und Schubspannungen ist das verallgemeinerte Hooke'sche Gesetz Gl. H.2, welches die inneren Spannungen über Elastizitätsmodule in Beziehung zu den Verzerrungsgeschwindigkeiten $\dot{\epsilon}$ setzt. Es bedarf jedoch einer weiteren Grundgleichung der nichtrelativistischen Mechanik, der Drehimpulserhaltung, um das Materialgesetz praktikabel zu gestalten. Durch die Drehimpulserhaltung, welche an dieser Stelle nur postuliert werden kann, wird der Tensor der Spannungen und damit auch der Tensor der inneren Spannungen σ_{ij} symmetrisch. Als Folge vereinfacht sich das verallgemeinerte Hooke'sche Gesetz zum Hooke'schen Gesetz Gl. H.3 ausgedrückt durch zwei Materialtensoren, die Lamé-Tensoren.

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\dot{\epsilon}_{kl}\tag{H.2}$$

$$= 2\eta_{ji}\dot{\epsilon}_{ij} + \lambda_{ji}^*\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij}\tag{H.3}$$

$$= 2\eta\dot{\epsilon}_{ij} + \lambda^*\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij}\tag{H.4}$$

Hierin ist

σ_{ij}	Tensor der inneren Spannungen
E_{ijkl}	Tensor der Elastizitätsmodule
$\dot{\epsilon}_{ij}$	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor, wobei $i = j$: Dilatationsgeschwindigkeit und $i \neq j$: Deformationsgeschwindigkeit
λ_{ji}^*	Der Lamé-Tensor für die Dilatation : Kompression
η_{ji}	Der Lamé-Tensor für die Deformation : Verzerrung

Für ein Gas mit annähernd symmetrischer Geschwindigkeitsverteilungsfunktion, das heißt, die Kollisionen der Gasteilchen treten in allen Raumrichtungen gleich auf, wird das makroskopische Materialverhalten isotrop und die Lamé-Tensoren gehen über in Lamé-Konstanten. Das Hooke'sche Gesetz wird dann zum isotropen Hooke'sche Gesetz Gl. H.4. Die Verzerrungsgeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_{ij}$ entspricht bei einem isotropen Materialverhalten dem arithmetischen Mittel aus der zeitlichen Änderung der Schubwinkel $\partial w_i / \partial x_j$ (in Gl. H.5), welche auch die Dilation, also die Volumenänderung in Normalenrichtung $\dot{\epsilon}_{kk}$ mit abdecken. Der Verzerrungsgeschwindigkeitstensor lässt sich algebraisch umformen zu Gl. H.6, sodass zwei Tensoren entstehen, die jeweils unterschiedliche Phänomene berücksichtigen. Der darin enthaltene Deviator der Schubspannungen $\hat{\epsilon}_{ij}$ beschreibt die isochore Deformation, während der additive Tensor $1/3 \dot{\epsilon}_{ij} \delta_{ij}$ die gestalttreue Volumenänderung, also die Kompression beschreibt. Der Deviator der Schubspannungen folgt dann zu Gl. H.7.

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right] \quad (\text{H.5})$$

$$= \hat{\epsilon}_{ij} + \frac{1}{3} \dot{\epsilon}_{kk} \delta_{ij} \quad (\text{H.6})$$

$$\Rightarrow \hat{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \quad (\text{H.7})$$

Fügt man das isotrope Hooke'sche Gesetz Gl. H.4, formuliert mit Gl. H.6, in den Spannungstensor Gl. H.1 ein, so ergeben sich Gl. H.8 und Gl. H.10 (algebraische Umformung siehe Gl. R.10). Es zeigt sich, dass die Normalspannungen Gl. H.8 sowohl von der Lamé-Konstanten für Dilatation, der sogenannten Volumenviskosität λ^* , als auch von der Lamé-Konstanten für Deformation, der sogenannten dynamischen Viskosität η abhängen. Die Schubspannungen Gl. H.10 hingegen sind nur durch die dynamische Viskosität bedingt. Der Term $[\lambda^* + 2/3 \eta]$ wird Druckzähigkeit η_D genannt und ist für viele Gase als vernachlässigbar klein vermessen worden. Wodurch die Stokes'sche Hypothese $\lambda^* = -2/3 \eta$ als gültig angesehen werden darf. Der thermodynamische Druck p entspricht dann den Normalspannungen \bar{p} des Gases Gl. H.9. Molekular kinetisch ist dieses nur dann erfüllt, wenn die kinetische Energie der Teilchen bei einer Kollision nur auf die drei translatorischen Freiheitsgrade wirkt. Bei den bereits angenommenen Hartkugeln als Gasteilchen ist dieses gegeben. Für diesen Fall existiert nur eine Lamé-Konstante, die dynamische Viskosität η . Sie kann von makroskopischen Größen, wie

Temperatur T , thermodynamischem Druck p oder Massenanteil $\xi_s = \rho_s/\rho$ abhängen. Im Heißgas-System liegt allerdings nur eine Komponente vor, wodurch die Abhängigkeit der dynamischen Viskosität vom Massenanteil entfällt.

$$\Rightarrow \quad \tilde{p} = \left[\lambda^* - \eta \frac{2}{3} \right] \frac{\partial w_k}{\partial x_k} + p = \eta_D \frac{\partial w_k}{\partial x_k} + p \quad (\text{H.8})$$

$$\tilde{p} = p \quad \forall \quad \eta_D \rightarrow 0 \quad (\text{H.9})$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\tau}_{ij} = \eta(T, \xi_s, p, \dots) \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \underbrace{\frac{2}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij}}_{\text{Dilatationsreibung}} \right] \quad (\text{H.10})$$

In den meisten Fällen wird das räumliche Feld der Temperatur im Heißgas-System anders sein als im Stoff-System. Als Folge daraus kann sich die örtliche Verteilung der Spannungen und damit die Strömung im Heißgas-System von jener im Stoff-System unterscheiden. Die für die SAM notwendige Vergleichbarkeit hängt also unmittelbar mit der Abhängigkeit der dynamischen Viskosität von Temperatur und den Massenanteilen, gegebenenfalls auch dem Druck zusammen. Wie stark diese Abhängigkeit ausgeprägt sein darf, um die Aussagefähigkeit der SAM nicht signifikant zu beeinträchtigen, kann nur im Einzelfall bestimmt werden. Für repräsentative Bedingungen wird jedoch eine Abschätzung in Kap. 4.2.5 angegeben.

Bedingungen Die Materialgleichungen für Normal- Gl. H.9 und für Schubspannung Gl. H.10 sind gültig für Gase und Gasgemische, die sich nach dem isotropen Hooke'schen Gesetz verhalten, sofern die Drehimpulserhaltung sowie die Stokes'sche Hypothese erfüllt sind.

H.2. Kopplung von innerer Energie und Temperatur

Die innere Energie u tritt in den Gleichungen zur Erhaltung der Energie sowohl bei ein- als auch bei mehrkomponentigem Gas auf. Sie ist also für das Heißgas- und das Stoffsystem relevant. Ein Ansatz, sie in makroskopisch erfassbaren Größen zu beschreiben, sind die kalorischen Zustandsgleichungen. Diese koppeln die thermischen Zustandsgrößen, Temperatur T , Druck p und Massendichte ρ mit den kalorischen Zustandsgrößen, innere Energie u und Enthalpie h . Die Enthalpie h ist die Summe aus innerer Energie und Volumenänderungsarbeit Gl. H.11.

$$h = u + p v \quad (\text{H.11})$$

Der bei der SAM verwendete Ansatz zur Beschreibung der inneren Energie und der Enthalpie beruht auf der Annahme, dass sich die Komponenten des Gemisches jeweils so verhalten, als wären sie ein einkomponentiges Gas ohne die Anwesenheit der anderen Komponenten. Die kalorischen Zustandsgrößen lassen sich dann für je-

de Komponente definieren. Für jede Komponente s sei die innere Energie u_s über die spezifische isochore Wärmekapazität $c_{v,s}(T, \rho_s)$ der Temperatur proportional. Die Enthalpie jeder Komponente sei über die spezifische isobare Wärmekapazität $c_{p,s}(T, p_s)$ der Temperatur proportional. Ein Gas dessen innere Energie und Enthalpie somit nach Gl. H.12 und Gl. H.13 beschrieben werden kann, wird im Folgenden kalorisch ideal genannt, wenn die spezifischen Wärmekapazitäten von der Temperatur unabhängig sind. Für das Gemisch wird angenommen, dass sich die kalorischen Zustandsgrößen mit den Massenanteilen gemäß Gl. H.16, Gl. H.15, Gl. H.18 und Gl. H.19 gewichtet superponieren lassen zu Gl. H.14 und Gl. H.17. Die Aufteilung der inneren Energie sowie der Enthalpie auf die Komponenten soll daher nur von den Massen der jeweiligen Teilchen und nicht von deren Größe abhängen. Die Van der Waals Durchmesser der Teilchen aller Komponenten im Stoff-System müssen also annähernd gleich sein.

$$\begin{aligned} u_s(T, \rho_s) &= u_s^{ref} + \int_{T_{ref}}^T c_{v,s}^{ref}(T, \rho_s) dT \\ &\equiv c_{v,s}(\rho_s) T \quad \forall \quad c_{v,s}^{ref} \neq c_{v,s}^{ref}(T) \end{aligned} \quad (\text{H.12})$$

$$\begin{aligned} h_s(T, p_s) &= h_s^{ref} + \int_{T_{ref}}^T c_{p,s}^{ref}(T, p_s) dT \\ &\equiv c_{p,s}(p_s) T \quad \forall \quad c_{p,s}^{ref} \neq c_{p,s}^{ref}(T) \end{aligned} \quad (\text{H.13})$$

$$u(T, \rho_s, \xi_s) = c_v(\rho_s, \xi_s) T \quad (\text{H.14}) \quad h(T, p_s, \xi_s) = c_p(p_s, \xi_s) T \quad (\text{H.17})$$

$$u(T, \rho_s, \xi_s) = \sum_{s=1}^m (u_s \xi_s) \quad (\text{H.15}) \quad h(T, p_s, \xi_s) = \sum_{s=1}^m (h_s \xi_s) \quad (\text{H.18})$$

$$\begin{aligned} c_v(\rho_s, \xi_s) &= \sum_{s=1}^m (c_{v,s}(\rho_s) \xi_s) & c_p(p_s, \xi_s) &= \sum_{s=1}^m (c_{p,s}(p_s) \xi_s) \\ &(\text{H.16}) & &(\text{H.19}) \end{aligned}$$

Der Vollständigkeit halber wird an dieser Stelle der Isentropenexponent κ nach Gl. H.20 eingeführt. Er ist das Verhältnis von innerer Enthalpie und Energie und somit auch der isobaren und isochoren Wärmekapazitäten. Dieser Zusammenhang wird in Kap. 4.1.5 verwendet. Weiterhin lässt sich der Isentropenexponent auch für kalorisch ideales Gas ausdrücken durch die Freiheitsgrade FG der Teilchen des Gases. Dieser Ausdruck wird in Kap. 4.2.5 benötigt.

$$\kappa = \frac{dh}{du} = \frac{c_p(T, p)}{c_v(T, \rho)} = \frac{FG + 2}{FG} \quad (\text{H.20})$$

Bedingungen Die kalorische Zustandsgleichung des Gasgemisches Gl. H.14 ist gültig, sofern alle Komponenten des Gases als kalorisch ideales Gas angesehen werden

können. Weiterhin müssen zur Bestimmung der spezifischen Wärmekapazität des Gemisches mittels Wichtung der Massenanteile die Van der Waals Durchmesser aller Teilchen hinreichend ähnlich sein.

H.3. Kopplung von Druck, Massendichte und Temperatur

Durch die Beschreibung der inneren Energie mittels spezifischer Wärmekapazität und Temperatur tritt neben dem thermodynamischen Druck p und der Massendichte ρ auch die Zustandsgröße Temperatur T in der gekoppelten Erhaltungsgleichung der Energie auf. Diese Zustandsgrößen lassen sich als thermische Zustandsgrößen über eine Zustandsgleichung koppeln und somit die Anzahl der Variablen reduzieren. Dazu wird angenommen, dass sich die Komponenten eines Gemisches jeweils so verhalten, als wären sie ein einkomponentiges Gas ohne die Anwesenheit der anderen Komponenten. Dieses wird sowohl für das Heißgas-System bestehend aus verschiedenen Molekülen der Luft, als auch für das Stoff-System bestehend aus Luft und Naphthalin-Dampf postuliert. Jede Komponente besitzt dann die partiellen Zustandsgrößen T_s , p_s und ρ_s . Ein Ansatz, diese partiellen Zustandsgrößen zu koppeln, ist die Proportionalität von Druck und dem Produkt aus Massendichte und Temperatur gemäß Gl. H.21. Der Koeffizient $R_s = n_s \tilde{R}$ ist die spezifische Gaskonstante und über die Teilchendichte n_s der Spezies immanent. Der Koeffizient \tilde{R} ist die universelle Gaskonstante und beschreibt die Energie pro Temperatur von einem mol¹ an Teilchen. Ein Gas, dessen thermische Zustandsgrößen derart beschrieben werden können, wird im Folgenden thermisch ideal genannt. Da sich jede Komponente unabhängig von den anderen nach der jeweiligen thermischen Zustandsgleichung verhalten soll, lässt sich der Druck p des Gasgemisches aus der Linearkombination der partiellen Drücke der Komponenten p_s gemäß dem Gesetz von Dalton Gl. H.22 berechnen. Als Folge kann auch für ein Gemisch aus thermisch idealen Gasen eine thermische Zustandsgleichung angegeben werden zu Gl. H.23, wobei die Massendichte und die spezifische Gaskonstante von den Massenanteilen der Komponenten ξ_s nach Gl. H.24 abhängig sein können. Diese thermische Zustandsgleichung beeinflusst ebenfalls die Vergleichbarkeit von Heißgas- und Stoff-System, da im letztgenannten Fall der partielle Druck des Naphthalin-Dampfes teilweise durch einen empirischen Ansatz postuliert werden muss. Dahingegen bleibt

¹ 1 mol $\approx 6,022 \cdot 10^{23}$

der Druck im Heißgas-System eine unbeeinflusste Variable.

$$p_s = \rho_s T R_s = n_s T \tilde{R} \quad (\text{H.21})$$

$$p = \sum_{s=1}^m p_s \quad (\text{H.22})$$

$$p = \sum_{s=1}^m p_s = \sum_{s=1}^m (\rho_s R_s) T = \rho(\xi_s) R(\xi_s) T$$

$$\forall R(\xi_s) = \frac{1}{M} \sum_s R_s M_s = \sum_s R_s \xi_s \quad (\text{H.23})$$

$$\xi_s = \frac{m_s N_s}{\sum_{s=1}^m (m_s N_s)} = \frac{\rho_s}{\rho} \quad (\text{H.24})$$

Bedingungen Die thermische Zustandsgleichung des Gasgemisches Gl. H.23 ist gültig, sofern alle Komponenten des Gases als thermisch ideales Gas angesehen werden können. Weiterhin muss der Druck des Gemisches der Summe der Partialdrücke der Komponenten entsprechen.

H.4. Bestimmung der Wärmeleitung

Die Wärmeleitung \dot{q}_i tritt ebenso wie die innere Energie in den Gleichungen zur Erhaltung der Energie sowohl bei ein- als auch bei mehrkomponentigem Gas auf. Sie ist daher für Heißgas- und Stoff-System relevant und bedarf noch einer Beschreibung in makroskopisch erfassbaren Größen. Ein Ansatz hierfür ist die Fourier'sche Wärmeleitung Gl. H.25. Dieser lineare Ansatz setzt die Wärmestromflächendichte \dot{q}_i über die Wärmeleitfähigkeit λ_{ji} dem Temperaturgradienten $\partial T / \partial x_i$ proportional. Aus der verwendeten Kinetischen Gastheorie folgt, dass die Wärmeleitfähigkeit von der teilchenrelativen Geschwindigkeit, also der thermischen Geschwindigkeit, bedingt wird. Dieses äußert sich makroskopisch durch die mögliche Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit von den Zustandsgrößen Temperatur T , Druck p und Massenanteil ξ_s . Für ein Gas mit annähernd symmetrischer Verteilungsfunktion der thermischen Geschwindigkeit wird das Materialverhalten isotrop und der Wärmeleitfähigkeitstensor wird zur skalaren Funktion λ . Bei der SAM wird die Isotropie als gegeben angenommen. Die Wärmestromflächendichte folgt dann zu Gl. H.26.

$$\dot{q}_i = -\lambda_{ji}(T, p, \xi_s, \dots) \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (\text{H.25})$$

$$\dot{q}_i = -\lambda(T, p, \xi_s, \dots) \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (\text{H.26})$$

Bedingungen Die Wärmeleitung muss nach dem Fourier'schen Ansatz mit isotroper Wärmeleitfähigkeit erfolgen. Die Wärmeleitfähigkeit kann jedoch von Temperatur T , Druck p oder Massenanteil ξ_s abhängen.

H.5. Bestimmung der Diffusionsgeschwindigkeit

Die Diffusionsgeschwindigkeit $w_{\text{diff},n,i}$ der Komponente n in Richtung i tritt nur in den Erhaltungsgleichungen des Stoff-Systems auf und bedarf noch der Formulierung in makroskopisch erfassbaren Größen. Den Ansatz hierfür liefert [38] mit Gl. H.27. Diese Gleichung leitet sich aus der Lösung der BTGl, Gl. B.1 ab, wobei für die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion $f_n(\zeta, \mathbf{r}, t)$ der Störansatz

$$f_n(\zeta, \mathbf{r}, t) = f_n(\zeta, \mathbf{r}, t)^{[0]} + \epsilon \cdot f_n(\zeta, \mathbf{r}, t)^{[1]} + \epsilon^2 \cdot f_n(\zeta, \mathbf{r}, t)^{[2]} + \dots$$

verwendet und durch

$$f_n(\zeta, \mathbf{r}, t)^{[1]} \stackrel{!}{=} f_n(\zeta, \mathbf{r}, t)^{[0]} \cdot \Phi(\zeta, \mathbf{r}, t)$$

bis zum Grade $^{[1]}$ approximiert wird². Die Verteilungsfunktion unterscheidet sich durch die Störfunktion $\Phi(\zeta, \mathbf{r}, t)$ von der Gleichgewichtsverteilung $f_n(\zeta, \mathbf{r}, t)^{[0]}$. Die Störfunktion ist der Grund für die Ausdrücke $\ln(p)$ und $\ln(T)$ in den Termen B und D von Gl. H.27, welche mit dimensionsbehafteten Größen formal nicht lösbar sind. Erst durch die lineare Abbildung der Gradienten dieser Größen, wie sie in Kap. 4.2.5 zur Abschätzung der Terme erfolgt, lässt sich dieser Ausdruck quantitativ bestimmen. Es handelt sich daher um die numerische Lösung der BTGl für das Nicht-Gleichgewicht 1. Ordnung. Die zwei Komponenten des Gasgemisches des Stoff-Systems seien der Allgemeingültigkeit wegen im Folgenden durch a und b gekennzeichnet³. Die Diffusion wird dabei getrieben durch vier Mechanismen: Konzentrationsunterschiede (Term A), Druckunterschiede (Term B), äußere Feldkräfte (Term C) und Temperaturunterschiede (Term D).

$$\begin{aligned} j_{n,i}^* &= \rho_n w_{\text{diff},n,i} = \\ &= \frac{\rho_n}{\rho} \left[\underbrace{\frac{n^2}{n_n} \sum_{s=1}^m m_s D_{ns,i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{n_n}{n} \right)}_A + \underbrace{\sum_{s=1}^m m_s D_{ns,i} \frac{\partial \ln(p)}{\partial x_i} \left[\frac{n_n}{n} - \frac{\rho_n}{\rho} \right]}_B \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{\frac{\rho_n}{p\rho} \left[\rho k_i - \sum_{s=1}^m n_s m_s k_{s,i} \right]}_C - \underbrace{D_{n,i}^T \frac{\partial \ln(T)}{\partial x_i}}_D \right] \quad (\text{H.27}) \end{aligned}$$

²Dieses Vorgehen wird auch als Enskog-Entwicklung bezeichnet.

³Die Zuordnung a, b zu Luft und Naphthalin-Dampf ist hier zunächst nicht relevant.

Die Bedeutung der Größen in Gl. H.27 sind

$j_{n,i}^*$	Diffusionsstromdichte der Komponente n
$D_{ab,i}$	Diffusionskoeffizient der Komponente a in Komponente b
$D_{b,i}^T$	Thermodiffusionskoeffizient der Komponente b
n	Teilchendichte
ρ	Massendichte
p	thermodynamischer Druck
a	spezifisch der Komponente a
i	Richtung

Die Diffusion durch Temperaturunterschiede (Term D), im Allgemeinen als Thermo-diffusion bezeichnet, ist vernachlässigbar, wenn die Temperaturgradienten gegen Null gehen, also ein isothermes Feld vorliegt, oder der Thermodiffusionskoeffizient⁴ D_n^T hinreichend klein ist, um die Wirkung größerer Temperaturgradienten aufzuheben. Dieses sei an dieser Stelle postuliert. Ferner zeigt [38] (S.1193), dass die Summe der Thermodiffusionskoeffizienten beider Komponenten eines binären Gases gegen Null geht. Somit beeinflusst die Thermo-diffusion den Energietransport im binären Gemisch nicht, da in der Energiegleichung Gl. F.25 der Term mit den Diffusionsgeschwindigkeiten $w_{\text{diff},i}$ über beide Komponenten summiert wird. Für die Energieerhaltung ist das Postulat daher uneingeschränkt gültig. Für die Massenerhaltung der Komponenten Gl. F.22 gilt dieses nicht. Eine Abschätzung der Thermo-diffusion kann in dieser Arbeit nicht angegeben werden. Für die SAM muss daher sichergestellt sein, dass das Stoff-System hinreichend kleine Temperaturgradienten aufweist, idealerweise ist es isotherm. Die Diffusion durch äußere Feldkräfte (Term C) geht gegen Null, wenn die Druckkräfte wesentlich größer sind als die Feldkräfte $p \gg k_j$ oder die zuletzt genannten auf alle Komponenten gleich wirken. Da die bei der SAM auftretenden Feldkräfte durchaus größer sein können als die Druckkräfte, müssen die Massenkräfte komponentenunabhängig sein, wodurch Gl. H.28 erfüllt wird.

$$k_{s,i} = k_i \quad (\text{H.28})$$

Bei der SAM ist dieses gegeben, da alle speziesabhängigen Feldkräfte, wie beispielsweise elektromagnetische Felder vernachlässigt werden können. Die Diffusion durch Druckunterschiede (Term B), im Allgemeinen als Druckdiffusion bezeichnet, enthält denselben Koeffizienten D_{nn} wie die Diffusion aufgrund von Konzentrationsunterschieden (Term A), welche im Folgenden als molare Diffusion bezeichnet wird. Daher kann die Druckdiffusion nur gegenüber der molaren Diffusion vernachlässigt werden, wenn entweder der Druckgradient ausreichend klein oder die Teilchenkonzentration n_n/n gleich der Massendichtekonzentration ρ_n/ρ ist. Letzteres ist gegeben, wenn die Teilchenmassen der Gaskomponenten gleich sind (Gl. H.29). Die bei dem Stoff-System der SAM auftretenden Massen der Luft-Teilchen und der Naphthalin-Dampf-Teilchen

⁴Die hier verwendete Definition des Thermodiffusionskoeffizienten D_n^T entspricht nicht der üblichen Form, wie z.B. beim Soret-Koeffizienten. In dieser Arbeit wird für den üblichen Thermodiffusionskoeffizienten die Kennzeichnung $D_{\text{Thermodiffusion}}$ verwendet. Zu beachten ist, dass sich die Dimensionen der Koeffizienten unterscheiden: $[D_n^T] = \{M T R^{-1}\}$, $[D_{\text{Thermodiffusion}}] = \{T^{-1}\}$

sind jedoch nicht identisch. Eine Abschätzung, welchen Einfluss die Druckdiffusion bei diesen unterschiedlichen Teilchenmassen auf die Diffusionsgeschwindigkeit hat, wird in Kap. 4.2.5 diskutiert. Um den Einfluss der Druckdiffusion ausschließen zu können, muss das Stoff-System isobar sein. Für die mit der SAM üblicherweise betrachteten Strömungssysteme, insbesondere solche mit Systemrotation, ist diese nicht gegeben, wodurch eine erhöhte Unsicherheit der Methode in Kauf genommen werden muss.

$$\begin{aligned} \frac{n_a}{n} &= \frac{n_a}{n_a + n_b} = \frac{n_a}{n_a + n_b \frac{m_b}{m_a}} \\ &= \frac{n_a m}{n_a m + n_b m} = \frac{\rho_a}{\rho_a + \rho_b} = \frac{\rho_a}{\rho} = \xi_a \quad \forall m_a = m_b = m \end{aligned} \quad (\text{H.29})$$

Mit den getroffenen Postulaten vereinfacht sich der Ansatz zur Beschreibung der Diffusionsstromdichte $j_{a,i}^*$ zum ersten Fick'schen Gesetz Gl. H.31 für binäre Gemische. Hierbei steht $j_{a,i}^*$ für die Teilchenstromdichte von Komponente a in sich selbst und in Komponente b . Die Diffusion einer Komponente lässt sich dabei unterteilen in jene, die durch die Anwesenheit der eigenen Teilchen gehemmt wird, benannt als Selbstwiderstand (Term E), und in jene, die durch die Teilchen der anderen Komponente gemindert wird, bezeichnet als Fremdwiderstand (Term F). Diese Widerstände und damit auch die molaren Diffusionskoeffizienten sind durch Größe sowie Masse der jeweiligen Teilchen und durch die Verteilung von deren thermischer Geschwindigkeit bedingt. Makroskopisch äußert sich dieses in der Abhängigkeit der Koeffizienten von Massendichte, -anteil und Temperatur, wodurch Gl. H.30 folgt.

$$D_{nn,i} = D_{nn,i}(T, \xi_n, \rho) \quad (\text{H.30})$$

Bei Annahme von gleichen Teilchenmassen $m_a = m_b$ vereinfacht sich das Fick'sche Gesetz zu Gl. H.32.

$$j_{a,i}^* = \frac{\rho_a}{\rho} \frac{n^2}{n_a} \left[\underbrace{m_a D_{aa,i}}_E + \underbrace{m_b D_{ab,i}}_F \right] \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{n_a}{n} \right) \quad (\text{H.31})$$

$$= \rho [D_{aa,i} + D_{ab,i}] \frac{\partial \xi_a}{\partial x_i} \equiv \rho [D_{aa,i} + D_{ab,i}] \frac{\partial n_a}{\partial x_i} \quad \forall m_a = m_b \quad (\text{H.32})$$

$$j_{b,i}^* = \rho [D_{bb,i} + D_{ba,i}] \frac{\partial \xi_b}{\partial x_i} \equiv \rho [D_{bb,i} + D_{ba,i}] \frac{\partial n_b}{\partial x_i} \quad \forall m_a = m_b$$

Hierin ist

$j_{a,i}^*$	Diffusionsstromdichte der Komponente a
$D_{aa,i}$	Diffusionskoeffizient der Komponente a in Komponente a
$D_{ab,i}$	Diffusionskoeffizient der Komponente a in Komponente b
$\xi_a = \frac{\rho_a}{\rho}$	Massenanteil der Komponente a
$x_a = \frac{n_a}{n}$	Molanteil der Komponente a

Die Diffusionskoeffizienten sind dann nicht mehr Funktionen der Massenanteile, son-

dem nur noch der Molanteile x_s (siehe Gl. H.33). Bei binären Gemischen, wie dem Stoff-System sind die Stoffanteile bereits durch einen Molanteil nach Gl. H.34 fest determiniert, wodurch die Diffusion nur von einem Molanteil abhängt.

$$x_s = \frac{n_s}{n} = \frac{N_s}{N} \Rightarrow \sum_{s=1}^m x_s = 1 \quad (\text{H.33})$$

$$x_b = 1 - x_a \quad : \text{binär} \quad (\text{H.34})$$

Die getrennte experimentelle Bestimmung der Koeffizienten von Selbst- und Fremddiffusion ist allerdings nahezu unmöglich. Daher wird durch Gl. H.35 ein Koeffizient $D_{aab,i}$ definiert, der die effektive⁵ Diffusion der Komponente a beschreibt, sowie ein Koeffizient $D_{bba,i}$, der die effektive Diffusion der Komponente b determiniert (Gl. H.36). Deren Abhängigkeiten von Temperatur, Molanteil und weiteren Größen, wie die tatsächlichen Van der Waals Durchmesser und Teilchenmassen, bilden dann den Einfluss von Selbst- und Fremddiffusion ab.

$$j_{ab,i}^* = \rho D_{aab,i}(T, x_a, \dots) \frac{\partial \xi_a}{\partial x_i} \equiv \rho D_{aab,i}(T, x_a, \dots) \frac{d}{dx_i} \left(\frac{n_a}{n} \right) \quad \forall m_a = m_b \quad (\text{H.35})$$

$$j_{ba,i}^* = \rho D_{bba,i}(T, x_a, \dots) \frac{\partial \xi_b}{\partial x_i} \equiv \rho D_{bba,i}(T, x_a, \dots) \frac{d}{dx_i} \left(\frac{n_b}{n} \right) \quad \forall m_a = m_b \quad (\text{H.36})$$

Hierin bedeutet

- $j_{ab,i}^*$ Diffusionsstromdichte der Komponente a in Komponente b
- $j_{ba,i}^*$ Diffusionsstromdichte der Komponente b in Komponente a
- $D_{aab,i}$ Effektiver Diffusionskoeffizient der Komponente a in Komponente b
- $D_{bba,i}$ Effektiver Diffusionskoeffizient der Komponente b in Komponente a

Die Erhaltungsgleichung der Diffusionsmassenströme Gl. E.4 bedingt für ein binäres Gemisch die äquimolare Diffusion Gl. H.37. Bei der SAM wird weiterhin angenommen, dass diese nur eindimensional in Richtung x_w erfolgt, wodurch sich deren Gleichung auf die, der eindimensionalen äquimolaren Diffusion Gl. H.38 vereinfacht. Es wird somit postuliert, dass Naphthalin-Dampf und Luft so in entgegengesetzte Richtung mit einem jeweiligen Teilchenstrom diffundieren, dass die Massendichte des Gemisches konstant bleibt. Beim Stofftransport senkrecht zu einer stoffdichten Wand kann diese Bedingung nicht vollständig erfüllt werden, allerdings laut [95]

⁵Der hier verwendete Begriff effektive Diffusion ist nicht zu verwechseln mit jenem, der bei der Beschreibung von Diffusion durch poröse Medien verwendet wird.

annähernd, wenn sehr kleine Molanteile vorliegen.

$$\sum_i j_{ab,i}^* = - \sum_i j_{ba,i}^* : \text{binär} \quad (\text{H.37})$$

$$j_{ab,x_w}^* = -j_{ba,x_w}^* \quad \forall j^* \in \mathbb{R}^1 : \text{binär und eindimensional} \quad (\text{H.38})$$

$$\Rightarrow \frac{dx_a}{dx_w} = \frac{d}{dx_w} (1 - x_b) = - \frac{dx_b}{dx_w} \quad (\text{H.39})$$

Weiterhin lässt sich aus dem trivialen Zusammenhang der Teilchenanzahl des binären Gemisches Gl. H.40, dem Gesetz von Dalton Gl. H.22 und der Annahme von thermisch idealen Gaskomponenten Gl. H.21 leicht erkennen, dass die Teilchendichte des Gemisches gleich der Summe der Teilchendichten der Komponenten Gl. H.41 ist.

$$N = N_a + N_b \quad (\text{H.40})$$

$$p = nT\tilde{R} \equiv p_a + p_b = n_aT\tilde{R} + n_bT\tilde{R} \quad \forall \quad n = \frac{N}{V} \quad \wedge \quad n_s = \frac{N_s}{V}$$

$$\Rightarrow n = n_a + n_b \quad (\text{H.41})$$

Damit kann die Gleichung der eindimensionalen, äquimolaren Diffusion ausgedrückt werden durch Gl. H.42. Für ein binäres Gemisch folgt nach Gl. H.34, dass sich die Molanteilgradienten vom Betrag gleichen (Gl. H.39).

$$j_{ab,x_w}^* = -\rho D_{aab,x_w}(T, x_a, \dots) \frac{dx_a}{dx_w} = \rho D_{bba,x_w}(T, x_a, \dots) \frac{dx_b}{dx_w} = -j_{ba,x_w}^* \quad (\text{H.42})$$

$$\Rightarrow D_{aab,x_w}(T, x_a, \dots) = D_{bba,x_w}(T, x_a, \dots) = D_{x_w}(T, x_a, \dots) \quad (\text{H.43})$$

Daraus ergibt sich unmittelbar, dass auch die effektiven Diffusionskoeffizienten gleich sind Gl. H.43 und durch einen gemeinsamen Diffusionskoeffizienten D_i ausgedrückt werden können. Somit ist das diffusive Verhalten von Teilchen beider Komponenten am gleichen Ort identisch und lässt sich über die Gleichung der eindimensionalen äquimolaren Diffusion der gleichschweren Komponenten eines binären Gemisches Gl. H.44 beschreiben.

$$j_{ab,x_w}^* = -\rho D_{x_w}(T, x_a, \dots) \frac{dx_a}{dx_w} = \rho D_{x_w}(T, x_a, \dots) \frac{dx_b}{dx_w} = -j_{ba,x_w}^* \quad (\text{H.44})$$

Bedingungen Die Stoffleitung erfolgt nach dem Fick'schen Ansatz als eindimensionale äquimolare Diffusion. Hierzu müssen die Teilchen der Komponenten gleiche Massen besitzen, um die Druckdiffusion ausschließen zu können oder es muss ein isobares Feld vorliegen. Weiterhin wirken auf alle Komponenten die gleichen Feldkräfte, um die Wirkung der Feldkraftdiffusion ausschließen zu können. Ebenso muss das Strömungssystem entweder isotherm sein oder Thermodiffusionskoeffizienten aufweisen, die hinreichend klein sind, um die Thermodiffusion vernachlässigen zu können.

I. Spezielle gekoppelte Erhaltungsgleichungen

Die speziellen gekoppelten Erhaltungsgleichungen werden durch das Einsetzen der Materialgleichungen (siehe Anh. H) in die gekoppelten Erhaltungsgleichungen des einkomponentigen Fluids Gl. F.18 bis Gl. F.20 und des Gemisches Gl. F.21 bis Gl. F.25 gewonnen. Die verwendeten algebraischen Behandlungen der Tensoren finden sich in Anh. R. Die speziellen gekoppelten Erhaltungsgleichungen beinhalten nur noch makroskopisch beschreibbare Variablen. Hierin ist x_w eine der drei Richtungen x_i . Weiterhin wurde für die Temperatur der Komponenten T_a und T_b noch keine Gleichheit angenommen. Daher ist die thermodynamische Temperatur T , wie sie im restlichen Teil der Gleichungen auftritt, eine in geeigneter Weise gemittelte Temperatur.

Die Erhaltungsgleichungen der Masse sowohl des einkomponentigen Fluids Gl. I.1 als auch des Gemisches Gl. I.4 werden in der Kontinuumtheorie als Kontinuitätsgleichungen bezeichnet. In Verbindung mit den gekoppelten Impulserhaltungsgleichungen (Gl. I.2 beziehungsweise Gl. I.6) bilden sie die nach Navier und Stokes benannten Bewegungsgleichungen, die Navier-Stokes-Gleichungen (NSGI). Das Strömungsverhalten eines Gases bei annähernd Normbedingungen¹ lässt sich durch die NSGI hinreichend genau beschreiben. Daher wird für die diesbezüglich getroffenen Annahmen keine Abschätzung der Richtigkeit durchgeführt. Die Massenerhaltungsgleichung der Komponenten Gl. I.5 ist als zweites Fick'sches Gesetz bekannt. Auch dieses ist zumindest für isobar isotherme Gassysteme als zutreffend anzusehen. Die gekoppelte Erhaltungsgleichung der Energie des einkomponentigen Fluids Gl. I.3 sowie des Gemisches Gl. I.7 repräsentieren den ersten Hauptsatz der Thermodynamik, im erstgenannten Fall für ein geschlossenes System und im letztgenannten Fall für ein offenes System². Diese Gleichungen unterscheiden sich in ihrem Aufbau durch den Term des molaren Transports von innerer Energie³, welcher nur im Stoff-System vorkommt (siehe Gl. I.7). Die generelle Gültigkeit der hier verwendeten Erhaltungsgleichungen der inneren Energie für das jeweilige System ist sicherlich gegeben und wird daher nicht weiter untersucht. Allerdings beruht die SAM auf dem Vergleich von Heißgas- und Stoff-System, deren innere Energie sich nach den Gleichungen unterschiedlich verhält. Welche Bedingungen vorliegen müssen, damit der Vergleich der Systeme trotzdem gerechtfertigt ist, lässt sich nur im Einzelfall abschätzen, wenn der Einfluss der inneren Energie auf den Stofftransport bekannt ist. Im Rahmen dieser Arbeit ist dieses nicht möglich. Bis auf die verschiedenen Energieerhaltungsgleichungen unterscheiden sich die Gleichungen des Heißgas-Systems nur von denen des Stoff-Systems durch die dort zusätzlich vorliegenden Massenerhaltungsgleichungen der Komponenten und den Abhängigkeiten der Koeffizienten der Materialgleichungen. Beim Stoff-System

¹Mittlere freie Weglänge der Teilchen entspricht etwa 10 Teilchendurchmesser.

²Vergleiche [96], Gl.(3.75) wobei dort die Massenkkräfte noch komponentenspezifisch sind.

³In [96] wird dieser Term durch einen molaren Enthalpiestrom dargestellt.

können diese Koeffizienten noch vom Massenanteil abhängig sein.

$$\begin{array}{c} \text{Heißgas-System} \\ \text{Masse} \\ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \end{array} \quad (I.1)$$

$$\begin{array}{c} \text{Impuls} \\ \rho \frac{Dw_j}{Dt} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta(T, p, \dots) \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right) \\ - \frac{\partial p}{\partial x_j} + k_j \rho \end{array} \quad (I.2)$$

$$\begin{array}{c} \text{Energie} \\ \rho \frac{D}{Dt} (c_v(\rho)T) = \eta(T, p, \dots) \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \\ - p \frac{\partial w_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda(T, p, \dots) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \end{array} \quad (I.3)$$

$$\begin{array}{lcl}
 & & \text{Stoff-System} \\
 & \text{Masse} & \\
 \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial w_i}{\partial x_i} & = & 0 \quad \text{mit} \quad \rho = \rho_a + \rho_b
 \end{array} \tag{I.4}$$

$$\begin{array}{lcl}
 & \text{Massen} & \\
 \rho \frac{D\xi_a}{Dt} & = & \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho D_{x_w}(T, \xi_a, \dots) \frac{d\xi_a}{dx_w} \right) \\
 & = & - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho D_{x_w}(T, \xi_b, \dots) \frac{d\xi_b}{dx_w} \right)
 \end{array} \tag{I.5}$$

$$\begin{array}{lcl}
 & \text{Impuls} & \\
 \rho \frac{Dw_j}{Dt} & = & \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta(T, p, \xi_a, \dots) \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right) \\
 & & - \frac{\partial p}{\partial x_j} + k_j \rho
 \end{array} \tag{I.6}$$

$$\begin{array}{lcl}
 & \text{Energie} & \\
 \rho \frac{D}{Dt} (c_v(\rho, \xi_a) T) & = & \underbrace{[c_{v,a} T_a - c_{v,b} T_b] \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho D_{x_w}(T, \xi_a, \dots) \frac{d\xi_a}{dx_w} \right)}_{\text{molarer Transport}} \\
 & & + \eta(T, p, \xi_a, \dots) \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \\
 & & - p \frac{\partial w_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda(T, p, \xi_a, \dots) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)
 \end{array} \tag{I.7}$$

J. Vereinfachungen des Heißgas-Systems

Zwei Terme der Energieerhaltungsgleichung des Heißgas-Systems Gl. I.3 müssen aus dieser gekürzt oder als vernachlässigbar klein angesehen werden, damit sie die Form Gl. 4.22 annimmt. Ein zu vernachlässigender Term ist die Änderung der Volumenänderungsarbeit Gl. J.1. Dieser verschwindet nur, wenn das Geschwindigkeitsfeld divergenzfrei ist Gl. J.2, was bei der SAM als gegeben angenommen wird.

$$-p \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{J.1})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{J.2})$$

Die Divergenzfreiheit bedingt, dass die Änderung der Massendichte in der Massenerhaltungsgleichung Gl. I.1 verschwindet. Das Fluid muss daher die Inkompressibilität Gl. J.3 erfüllen.

$$\frac{D\rho}{Dt} \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{J.3})$$

Die Divergenzfreiheit wirkt sich auch auf die Impulserhaltung des Heißgas-Systems Gl. I.2 aus. Die Impulsänderung aufgrund viskoser Kräfte vereinfacht sich zu Gl. J.4. Die algebraischen Schritte sind in Anh. K angegeben.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta(T, p, \dots) \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta(T, p, \dots) \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right] \right) \quad (\text{J.4})$$

Der zweite zu vernachlässigende Term ist die Dissipationsfunktion Φ Gl. J.5, welche die Änderung der inneren Energie aufgrund von Reibung darstellt. Eine vereinfachende Annahme für das Heißgas-System ist daher, dass die Dissipation gegenüber der Wärmeleitung vernachlässigbar klein ist (Gl. J.6).

$$\begin{aligned} \Phi &= \hat{\tau}_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \\ &= \eta(T, p, \dots) \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \frac{\partial w_j}{\partial x_i} = \eta(T, p, \dots) G(x^{-2}, w^2) \quad (\text{J.5}) \end{aligned}$$

$$\stackrel{!}{\ll} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda(T, p, \dots) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (\text{J.6})$$

Mit den getroffenen Annahmen einer divergenz- und nahezu dissipationsfreien Strömung im Heißgas-System folgen dann die Gleichungen der SAM für selbiges zu Gl. J.7 bis Gl. J.10.

Heißgas-System

Masse

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \quad (\text{J.7})$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i} \stackrel{!}{\rightarrow} 0 \quad (\text{J.8})$$

Impuls

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dw_j}{Dt} = & \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta(T, p, \dots)) \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right] \\ & + \eta(T, p, \dots) \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_i^2} - \frac{\partial p}{\partial x_j} + k_j \rho \end{aligned} \quad (\text{J.9})$$

Energie

$$\rho \frac{D}{Dt} (c_v(\rho) T) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda(T, p, \dots) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \quad (\text{J.10})$$

Bedingungen Die Gleichungen des Heißgas-Systems der SAM (Gl. J.7 bis Gl. J.10) sind gültig, wenn das Fluid des Heißgas-Systems divergenzfrei und daraus folgend auch inkompressibel ist. Weiterhin muss die Wärmeleitung wesentlich größer sein als die Dissipation.

K. Vereinfachungen der Stokes'schen Reibung

Reibungsimpuls

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta(T, p, \xi_a, \dots) \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right) \quad (\text{K.1})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta(T, p, \xi_a, \dots)) \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right] \\ &\quad + \eta(T, p, \xi_a, \dots) \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\eta(T, p, \xi_a, \dots) \left[\frac{2}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \right) \end{aligned} \quad (\text{K.2})$$

Divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld entspricht Gl. J.2

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i} = 0 \quad \equiv \quad \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \quad (\text{K.3})$$

Reibungsimpuls bei divergenzfreiem Geschwindigkeitsfeld

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} (\eta(T, p, \xi_a, \dots)) \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right] + \eta(T, p, \xi_a, \dots) \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_i^2} \quad (\text{K.4})$$

Gradientenfreies Viskositätsfeld

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\eta(T, p, \xi_a, \dots)) = 0 \quad (\text{K.5})$$

Reibungsimpuls bei divergenzfreiem Geschwindigkeitsfeld mit gradientenfreiem Viskositätsfeld

$$= \eta(T, p, \xi_a, \dots) \frac{\partial^2 w_j}{\partial x_i^2} \quad (\text{K.6})$$

L. Impulserhaltungsgleichung im rotierenden Relativsystem

Für ein inertiales System (Index I) lautet die vereinfachte, gekoppelte Impulserhaltungsgleichung Gl. J.9 bzw. Gl. I.6 in vektorieller Schreibweise

$$\rho \left. \frac{D\vec{w}}{Dt} \right|_I = \rho \vec{k} + \nabla \cdot \underline{\tau} \quad \equiv \quad \rho \frac{Dw_i}{Dt} = \rho k_j + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} \quad (\text{L.1})$$

wobei der Spannungstensor $\tau_{ji} = \underline{\tau}$ aus formalen Gründen zunächst noch nicht durch ein Materialgesetz ersetzt wurde. In dieser Form wird die Gleichung auch Cauchy'sche Bewegungsgleichung genannt. Für die folgende algebraische Abhandlung wird die Vektornotation verwendet und eine etwas ausführlichere Beschreibung angegeben. Die Abschnitte Kap. L.1 und Kap. L.2 finden sich mit weiterführenden Erklärungen in [32] (Kap.2.4, S.49 bis S.58).

L.1. Beschreibung eines Vektors in einem Relativsystem

Um die Transformation der Bewegungsgleichung durchführen zu können, muss die Transformation von Vektoren in einem mit ω bewegten Relativsystem bekannt sein. Diese wird in diesem Abschnitt hergeleitet.

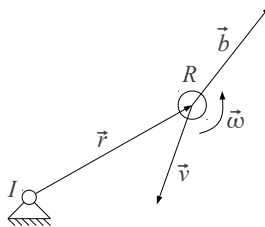


Abbildung L.1.: Vektoren im Inertial- und Relativsystem

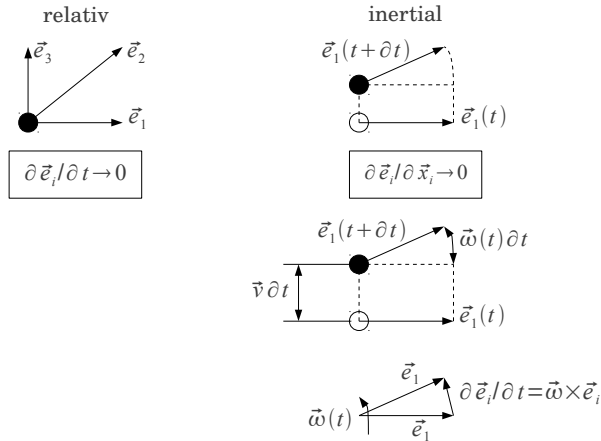


Abbildung L.2.: Einheitsvektoren im Inertial- und Relativsystem

Es existiere ein Vektor (siehe Abb. L.1)

$$\vec{b} = b_i \vec{e}_i \stackrel{\mathbb{R}^3}{\Rightarrow} \vec{b}_{\mathbb{R}^3} = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3 \quad \forall i \in \mathbb{N}[1;3] \quad (\text{L.2})$$

Das totale Zeitdifferential¹ von Gl. L.2 lässt sich ausdrücken durch einen relativen und einen inertialen Anteil

$$\left. \frac{D\vec{b}}{Dt} \right|_I = \underbrace{\vec{e}_i \frac{Db_i}{Dt}}_{\text{relativ}} + \underbrace{b_i \frac{D\vec{e}_i}{Dt}}_{\text{inertial}} \quad (\text{L.3})$$

Mit dem totalen Zeitdifferential des Einheitsvektors (siehe Abb. L.2)

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{e}}{Dt} &= \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial \vec{e}}{\partial x_i} \\ &\text{mit} \\ \frac{\partial \vec{e}_i}{\partial t} &\rightarrow 0 \\ \frac{\partial \vec{e}}{\partial x_i} &= \vec{\omega} \times \vec{e}_i \\ \Rightarrow \frac{D\vec{e}_i}{Dt} &= \vec{\omega} \times \vec{e}_i \end{aligned}$$

¹Das totale Zeitdifferential entspricht hier dem materiellen Differential.

und dem totalen Zeitdifferential des Vektors \vec{b}

$$\left. \frac{D\vec{b}}{Dt} \right|_I = \frac{Db_i}{Dt} \vec{e}_i + b_i [\vec{\omega} \times \vec{e}_i]$$

mit

$$\frac{Db_i}{Dt} \vec{e}_i = \left. \frac{D\vec{b}}{Dt} \right|_R$$

$$b_i [\vec{\omega} \times \vec{e}_i] = \vec{\omega} \times \vec{b}$$

folgt dann für Gl. L.3

$$\left. \frac{D\vec{b}}{Dt} \right|_I = \left. \frac{D\vec{b}}{Dt} \right|_R + \vec{\omega} \times \vec{b} \quad (\text{L.4})$$

L.2. Impulserhaltung mit Größen des Relativsystems

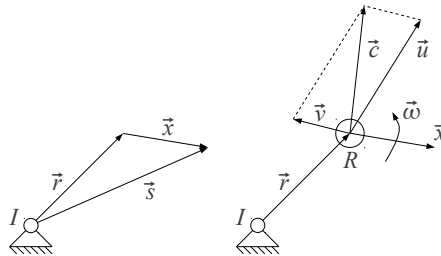


Abbildung L.3.: Geschwindigkeitsvektoren im Inertial- und Relativsystem

Die Gleichung Gl. L.1 lässt sich durch Größen eines Relativsystems (Index $|_R$) ausdrücken. Dazu kann die absolute Geschwindigkeit im Inertialsystem (siehe Abb. L.3)

$$\vec{w} = \left. \frac{D\vec{s}}{Dt} \right|_I$$

durch die vektorielle Zerlegung des Raumvektors

$$\vec{s} = \vec{r} + \vec{x}$$

ausgedrückt werden zu

$$\begin{aligned}
 \vec{w} &= \left. \frac{D(\vec{r} + \vec{x})}{Dt} \right|_I \\
 \left. \frac{D\vec{r}}{Dt} \right|_I &= \vec{v} : \text{Führungsbewegung} \\
 \left. \frac{D\vec{x}}{Dt} \right|_I &= \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{x} : \text{Relativbewegung} \\
 \vec{w} &= \vec{v} + \vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{x} \quad (\text{L.5})
 \end{aligned}$$

Damit folgt das totale Zeitdifferential der Geschwindigkeit im Inertialsystem

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{D\vec{w}}{Dt} \right|_I &= \left. \frac{D\vec{v}}{Dt} \right|_I + \left. \frac{D\vec{u}}{Dt} \right|_I + \left. \frac{D(\vec{\omega} \times \vec{x})}{Dt} \right|_I \\
 \text{wobei} \\
 \left. \frac{D\vec{u}}{Dt} \right|_I &= \left. \frac{D\vec{u}}{Dt} \right|_R + \vec{\omega} \times \vec{u} \\
 \left. \frac{D(\vec{\omega} \times \vec{x})}{Dt} \right|_I &= \vec{\omega} \times \left. \frac{D\vec{x}}{Dt} \right|_I + \left. \frac{D\vec{\omega}}{Dt} \right|_I \times \vec{x}
 \end{aligned}$$

Hierbei lässt sich das Differential der Relativgeschwindigkeit gemäß Gl. L.4 ausdrücken zu

$$\left. \frac{D(\vec{x})}{Dt} \right|_I = \left. \frac{D(\vec{x})}{Dt} \right|_R + \vec{\omega} \times \vec{x}$$

Weiterhin folgt die Trivialität für das Differential der Relativdrehung zu

$$\left. \frac{D\vec{\omega}}{Dt} \right|_I = \left. \frac{D\vec{\omega}}{Dt} \right|_R + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \left. \frac{D\vec{\omega}}{Dt} \right|_R$$

Somit ergibt sich für das Differential der Relativbewegung

$$\left. \frac{D(\vec{\omega} \times \vec{x})}{Dt} \right|_I = \vec{\omega} \times \left(\left. \frac{D\vec{x}}{Dt} \right|_R + \vec{\omega} \times \vec{x} \right) + \left. \frac{D\vec{\omega}}{Dt} \right|_R \times \vec{x}$$

und es folgt für das totale Zeitdifferential der Geschwindigkeit im Inertialsystem

$$\left. \frac{D\vec{w}}{Dt} \right|_I = \left. \frac{D\vec{v}}{Dt} \right|_I + \left. \frac{D\vec{u}}{Dt} \right|_R + \vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times \left(\left. \frac{D\vec{x}}{Dt} \right|_R + \vec{\omega} \times \vec{x} \right) + \left. \frac{D\vec{\omega}}{Dt} \right|_R \times \vec{x} \quad (\text{L.6})$$

Aus der Kinetik lassen sich weiterhin folgende Zusammenhänge bestimmen

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{D\vec{v}}{Dt} \right|_I &= \vec{a} : \text{Führungsbeschleunigung} \\
 \left. \frac{D\vec{x}}{Dt} \right|_R &= \vec{u} : \text{Relativgeschwindigkeit}
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\left. \frac{D\vec{w}}{Dt} \right|_I &= \vec{a} + \left. \frac{D\vec{u}}{Dt} \right|_R + \vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times (\vec{u} + \vec{\omega} \times \vec{x}) + \left. \frac{D\vec{\omega}}{Dt} \right|_R \times \vec{x} \\ &= \vec{a} + 2\vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) + \left. \frac{D\vec{\omega}}{Dt} \right|_R \times \vec{x} + \left. \frac{D\vec{u}}{Dt} \right|_R\end{aligned}$$

Mit der rein algebraischen Umformung

$$\left. \frac{D\vec{\omega}}{Dt} \right|_R = \left. \frac{D\vec{\omega}}{Dt} \right|_I = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

folgt der Zusammenhang von Bewegung im Inertialsystem und Relativsystem

$$\left. \frac{D\vec{w}}{Dt} \right|_I = \vec{a} + 2\vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{x} + \left. \frac{D\vec{u}}{Dt} \right|_R \quad (\text{L.7})$$

Setzt man die Beziehung Gl. L.7 in Gl. L.1 ein, folgt die Cauchy'sche Bewegungsgleichung, ausgedrückt durch die Größen des Relativsystems

$$\rho \left. \frac{D\vec{u}}{Dt} \right|_R = \rho \vec{k} + \nabla \cdot \underline{\tau} - \rho \left[\vec{a} + 2\vec{\omega} \times \vec{u} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{x} \right] \quad (\text{L.8})$$

Einige der Terme in Gl. L.8 können durch verbale Definitionen identifiziert werden

$$\begin{aligned}-\rho \vec{a} &: \text{Führungskraft} \\ -\rho 2\vec{\omega} \times \vec{u} &: \text{Corioliskraft} \\ -\rho \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) &: \text{Zentrifugalkraft}\end{aligned} \quad (\text{L.9})$$

Setzt man weiterhin das Materialgesetz der Spannungen Gl. H.9, Gl. H.10 in Gl. L.8 ein und berücksichtigt das angenommene inkompressible, isoviskose Verhalten des Fluids (Annahmen Gl. 4.24 und Gl. 4.25), so folgt die vereinfachte Bewegungsgleichung in Größen des Relativsystems Gl. L.10.

$$\left. \frac{D\vec{u}}{Dt} \right|_R = -2\vec{\omega} \times \vec{u} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{x}) + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{u} - \frac{1}{\rho} \nabla p \quad (\text{L.10})$$

M. Zerlegung der Impulserhaltung im Grenzfall II

Mit

$$\vec{u} = (u, v, w)^T \quad (\text{M.1})$$

$$\vec{\omega} = (0, 0, \omega)^T \quad (\text{M.2})$$

$$\vec{x} = (x, y, z)^T \quad (\text{M.3})$$

und

$$\begin{aligned} \left. \frac{D}{Dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right|_R &= -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) + \frac{\eta}{\rho} \Delta \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \frac{1}{\rho} \nabla p \\ &= -2 \begin{pmatrix} 0w - \omega v \\ \omega u - 0w \\ 0v - 0u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0z - \omega y \\ \omega x - 0z \\ 0y - 0x \end{pmatrix} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \frac{1}{\rho} \nabla p \\ &= -2 \begin{pmatrix} -\omega v \\ \omega u \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\omega y \\ \omega x \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \frac{1}{\rho} \nabla p \\ &= -2\omega \begin{pmatrix} -v \\ u \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 00 - \omega^2 x \\ -\omega^2 y - 00 \\ 0\omega x - 0\omega y \end{pmatrix} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \frac{1}{\rho} \nabla p \\ &= -2\omega \begin{pmatrix} -v \\ u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega^2 x \\ \omega^2 y \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \frac{1}{\rho} \nabla p \end{aligned} \quad (\text{M.4})$$

folgt

$$\begin{aligned} \left. \frac{D}{Dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right|_R &= -2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) + \frac{\eta}{\rho} \Delta \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \frac{1}{\rho} \nabla p \\ &= -2\omega \begin{pmatrix} -v \\ u \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega^2 x \\ \omega^2 y \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} - \frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{M.5})$$

beziehungsweise ausgeschrieben als ein Dreigleichungssystem

$$\begin{aligned} \text{x-Richtung: } \left. \frac{Du}{Dt} \right|_R &= +2\omega v + \omega^2 x + \frac{\eta}{\rho} \Delta u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \text{y-Richtung: } \left. \frac{Dv}{Dt} \right|_R &= -2\omega u + \omega^2 y + \frac{\eta}{\rho} \Delta v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \text{z-Richtung: } \left. \frac{Dw}{Dt} \right|_R &= \frac{\eta}{\rho} \Delta w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned}$$

(M.6)

N. Entdimensionierung der Impulserhaltungsgleichung Grenzfall II

Die Entdimensionierung des Dreigleichungssystems des Impulses wird nachfolgend ohne Erklärungen aufgezeigt. Jede Raumrichtung wird dabei separat betrachtet.

N.1. Substitution

Die verwendeten Substitutionen sind

$$x' \rightarrow \overline{x'} L_{char} \quad (\text{N.1})$$

$$y' \rightarrow \overline{y'} L_{char} \quad (\text{N.2})$$

$$z' \rightarrow \overline{z'} L_{char} \quad (\text{N.3})$$

$$u \rightarrow \overline{u} u_{char} \quad (\text{N.4})$$

$$v \rightarrow \overline{v} u_{char} \quad (\text{N.5})$$

$$w \rightarrow \overline{w} u_{char} \quad (\text{N.6})$$

$$x_0 \rightarrow \overline{x_0} L_{char} \quad (\text{N.7})$$

$$y_0 \rightarrow \overline{y_0} L_{char} \quad (\text{N.8})$$

$$p \rightarrow \overline{p} \cdot \rho \omega^2 L_{char}^2 \quad (\text{N.9})$$

$$t \rightarrow \overline{t} \cdot \frac{L_{char}}{u_{char}} \quad (\text{N.10})$$

$$Re_x = \frac{u_{char} \rho L_{char}}{\eta} \quad (\text{N.11})$$

$$Ro_x = \frac{\omega L_{char}}{u_{char}} \quad (\text{N.12})$$

$$Ro_{x_0} = \frac{\omega x_0}{u_{char}} \quad (\text{N.13})$$

$$Ro_{y_0} = \frac{\omega y_0}{u_{char}} \quad (\text{N.14})$$

Somit gilt auch

$$\frac{\partial}{\partial x'} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \overline{x'}} \frac{1}{L_{char}} \quad (\text{N.15})$$

$$\Delta x' \rightarrow \Delta \overline{x'} \frac{1}{L_{char}^2} \quad (\text{N.16})$$

$$\omega^2 x \rightarrow \omega^2 \left[\overline{x_0} + \overline{x'} \right] L_{char} \quad (\text{N.17})$$

$$\frac{\partial}{\partial z'} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \overline{z'}} \frac{1}{L_{char}} \quad (\text{N.18})$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \overline{y'}} \frac{1}{L_{char}} \quad (\text{N.19})$$

$$\Delta y' \rightarrow \Delta \overline{y'} \frac{1}{L_{char}^2} \quad (\text{N.20})$$

$$\omega^2 y \rightarrow \omega^2 \left[\overline{y_0} + \overline{y'} \right] L_{char} \quad (\text{N.21})$$

$$\Delta z' \rightarrow \Delta \overline{z'} \frac{1}{L_{char}^2} \quad (\text{N.22})$$

sowie

$$Ro_x^2 \bar{x}_0 = \frac{\omega^2 L_{char}^2}{u_{char}^2} \frac{x_0}{L_{char}} = Ro_x Ro_{x_0} \quad (N.23)$$

$$Ro_x^2 \bar{y}_0 = \frac{\omega^2 L_{char}^2}{u_{char}^2} \frac{y_0}{L_{char}} = Ro_x Ro_{y_0} \quad (N.24)$$

N.2. Entdimensionierung in x-Richtung

$$\text{x-Richtung: } \left. \frac{Du}{Dt} \right|_R = +2\omega v + \omega^2 x + \frac{\eta}{\rho} \Delta u - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (N.25)$$

N.2.1. Substituierte Gleichung

$$\left. \frac{D\bar{u}}{Dt} \right|_R = + \frac{2\omega L_{char}}{u_{char}} \bar{v} + \frac{\omega^2 L_{char}^2}{u_{char}^2} [\bar{x}_0 + \bar{x}'] + \frac{\eta}{\rho L_{char} u_{char}} \Delta \bar{u} - \frac{\omega^2 L_{char}^2}{u_{char}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}'} \quad (N.26)$$

N.2.2. Entdimensionierte Gleichung

$$\left. \frac{D\bar{u}}{Dt} \right|_R = +2Ro_x \bar{v} + Ro_x^2 \bar{x}_0 + Ro_x^2 \bar{x}' + \frac{1}{Re_x} \Delta \bar{u} - Ro_x^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \quad (N.27)$$

$$= +2Ro_x \bar{v} + Ro_x Ro_{x_0} + Ro_x^2 \bar{x}' + \frac{1}{Re_x} \Delta \bar{u} - Ro_x^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \quad (N.28)$$

Der Drehradius in x-Richtung ergibt sich zu

$$x_0 + x' = \frac{u_{char}}{\omega} [Ro_{x_0} + Ro_x] \quad (N.29)$$

N.3. Entdimensionierung in y-Richtung

$$\text{y-Richtung: } \left. \frac{Dv}{Dt} \right|_R = -2\omega u + \omega^2 y + \frac{\eta}{\rho} \Delta v - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (N.30)$$

N.3.1. Substituierte Gleichung

$$\left. \frac{D\bar{v}}{Dt} \right|_R = - \frac{2\omega L_{char}}{u_{char}} \bar{u} + \frac{\omega^2 L_{char}^2}{u_{char}^2} [\bar{y}_0 + \bar{y}'] + \frac{\eta}{\rho L_{char} u_{char}} \Delta \bar{v} - \frac{\omega^2 L_{char}^2}{u_{char}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}'} \quad (N.31)$$

N.3.2. Entdimensionierte Gleichung

$$\left. \frac{D\bar{u}}{Dt} \right|_R = -2Ro_x \bar{u} + Ro_x^2 \bar{y}_0 + Ro_x^2 \bar{y}' + \frac{1}{Re_x} \Delta \bar{v} - Ro_x^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} \quad (\text{N.32})$$

$$= -2Ro_x \bar{u} + Ro_x Ro_{y_0} + Ro_x^2 \bar{y}' + \frac{1}{Re_x} \Delta \bar{v} - Ro_x^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} \quad (\text{N.33})$$

Der Drehradius in y-Richtung ergibt sich zu

$$y_0 + y' = \frac{u_{char}}{\omega} [Ro_{y_0} + Ro_y] \quad (\text{N.34})$$

N.4. Entdimensionierung in z-Richtung

$$\text{z-Richtung: } \left. \frac{Dv}{Dt} \right|_R = + \frac{\eta}{\rho} \Delta w - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \quad (\text{N.35})$$

N.4.1. Substituierte Gleichung

$$\left. \frac{D\bar{z}}{Dt} \right|_R = + \frac{\eta}{\rho L_{char} u_{char}} \Delta \bar{w} - \frac{\omega^2 L_{char}^2}{u_{char}^2} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}'} \quad (\text{N.36})$$

N.4.2. Entdimensionierte Gleichung

$$\left. \frac{D\bar{w}}{Dt} \right|_R = + \frac{1}{Re_x} \Delta \bar{w} - Ro_x^2 \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{z}} \quad (\text{N.37})$$

O. Erweitertes gaskinetisches Transportmodell

Eine ausführlich kommentierte Herleitung des vereinfachten gaskinetischen Transportmodells, allerdings ohne die hier eingeführte Erweiterung auf mehrere Spezies, findet sich in [97].

O.1. Transport einer makroskopischen Variable

Es wird eine makroskopische Variable Φ angenommen, die stellvertretend für die Geschwindigkeit w , die innere Energie u und den Massenanteil ζ_a steht. Die Größe sei, passend zum 1/6 Modell eindimensional. Deren Änderung bei $m = \sum n$ Teilchenarten ist dann durch Gl. O.1 gegeben.

$$\Phi(y_0 \pm l_{f_n}) = \Phi(y_0) \pm \frac{d\Phi}{dy} \cdot l_{f_n} \pm \text{THO} \quad (\text{O.1})$$

Die Terme höherer Ordnung (THO) werden im Folgenden vernachlässigt und die restlichen Größen haben folgende Bedeutung

- Φ Makroskopische Variable
- y Raumkoordinate im \mathbb{R}^1
- l_{f_n} Mittlere freie Weglänge der Teilchen der Komponente n

Es wird nun in Gl. O.2 der Transport der Größe Φ durch zwei Teilchenarten bilanziert über ein infinitesimal kleines Volumen $A_y \cdot dy$ (siehe Abb. O.1b).

$$\begin{aligned}
 \frac{d\Phi}{dy} \cdot A_y = & - \left[\underbrace{\dot{n}_1^+ \cdot m_1 \cdot \left[\Phi(y_0) - \frac{d\Phi}{dy} \cdot l_{f_1} \right]}_{\text{Zustand von unten durch 1 transportiert}} \right. \\
 & + \underbrace{\dot{n}_1^- \cdot m_1 \cdot \left[\Phi(y_0) + \frac{d\Phi}{dy} \cdot l_{f_1} \right]}_{\text{Zustand von oben durch 1 transportiert}} \\
 & + \underbrace{\dot{n}_2^+ \cdot m_2 \cdot \left[\Phi(y_0) - \frac{d\Phi}{dy} \cdot l_{f_2} \right]}_{\text{Zustand von unten durch 2 transportiert}} \\
 & \left. + \underbrace{\dot{n}_2^- \cdot m_2 \cdot \left[\Phi(y_0) + \frac{d\Phi}{dy} \cdot l_{f_2} \right]}_{\text{Zustand von oben durch 2 transportiert}} \right] \quad (\text{O.2})
 \end{aligned}$$

mit $\dot{n}_1^+ > 0 \quad \wedge \quad \dot{n}_1^- < 0$

Hierin sind

- \dot{n}_1 Teilchenstromdichte der Komponente 1
- m_1 Teilchenmasse der Komponente 1

Weiterhin wird die Größe Λ nach Gl. O.3 eingeführt, die die Wirkung der makroskopischen Variablen, also die Schubspannung $\hat{\tau}$, die Wärmeleitung \hat{q} und den Stoffstrom j_a^* beschreibt. Für lineare Materialgesetze, wie sie bei der SAM angenommen werden, ist Λ proportional dem Gradienten der makroskopischen Variable.

$$\Lambda \stackrel{!}{\sim} \frac{d\Phi}{dy} \quad (\text{O.3})$$

Aus Gl. O.2 und Gl. O.3 folgt somit der molekularkinetisch beschriebene Zusammenhang von makroskopischer Wirkung Λ einer makroskopischen Variable Φ zu Gl. O.4

$$\Lambda = \left[\dot{n}_1 \cdot m_1 \cdot l_{f_1} + \dot{n}_2 \cdot m_2 \cdot l_{f_2} \right] \frac{d\Phi}{dy} \frac{1}{A_y} \quad (\text{O.4})$$

Der molekulare Transport makroskopischer Variablen ist damit abhängig von der Teilchenstromdichte \dot{n} , der Teilchenmasse m und der mittleren freien Weglänge der Teilchen l_f .

O.2. Mittlere freie Weglänge

Die mittlere freie Weglänge einer Teilchensorte l_{f_n} ist jene Länge, die ein Teilchen zwischen zwei Kollisionen, egal ob mit Teilchen der gleichen oder einer fremden Spezies, zurücklegt. Die Teilchen einer Sorte bewegen sich mit der gleichen Geschwindigkeit, der thermischen Geschwindigkeit c_{0_n} . Hierbei wird angenommen, dass die Temperatur im Bewegungsbereich der Teilchen konstant ist, daher der Index 0. Die Anzahl der Kollisionen pro Zeit, genannt Kollisionsfrequenz θ_s , wird für den Bewegungsbereich ebenfalls als konstant angenommen. Somit ergibt sich die mittlere freie Weglänge einer Teilchensorte zu Gl. O.5

$$l_{f_n} = \frac{c_{0_n}}{\theta_s} \quad (\text{O.5})$$

O.3. Kollisionsfrequenz

Um die mittlere freie Weglänge und damit den Transport der makroskopischen Variablen quantifizieren zu können, bedarf es der Kenntnis der Kollisionsfrequenz θ_s . Diese lässt sich beim angenommenen 1/6 Modell leicht abschätzen, da sich die Teilchen nur eindimensional bewegen. Bei mehreren Spezies, also bei Teilchen unterschiedlicher Masse, Durchmesser oder beides, ermöglicht erst die Reziprozität der Kollisionsfrequenz Gl. O.6 die Abschätzung. Diese besagt, dass die Kollisionen pro Zeit der Teilchensorte 1 mit sich selbst und mit den Teilchen der Komponente 2, genau den Kollisionen pro Zeit entsprechen, die in der Teilchensorte 2 mit sich selbst und mit den Teilchen der Komponente 1 auftreten.

$$\theta_s = \theta_{s_1} = \theta_{s_2} \quad (\text{O.6})$$

$$\theta_{s_1} = \frac{S_{11} + S_{12}}{\Delta t} \quad (\text{O.7})$$

$$\theta_{s_2} = \frac{S_{21} + S_{22}}{\Delta t} \quad (\text{O.8})$$

Es ist daher ausreichend, nur die Kollisionen der Sorte 1 mit sich selbst S_{11} und der anderen Sorte S_{12} abzuschätzen, um die Kollisionsfrequenz Gl. O.7 zu bestimmen.

Anzahl der Kollisionen von Teilchen der Sorte 1 mit Teilchen der Sorte 1 Die Anzahl aller Teilchen, die sich in einem zylindrischen Volumen ΔV_{11} aufhalten, dessen Durchmesser genau zweimal dem Teilchendurchmesser entspricht und dessen Länge von einem Teilchen mit der thermischen Geschwindigkeit c_{0_1} genau in der Zeit Δt durchflogen wird, entspricht der Kollisionsanzahl S_{11} (siehe Abb. O.1a). Es gilt daher Gl. O.9, wobei σ_1 der Van der Waals Durchmesser und n_1 die räumliche Dichte der

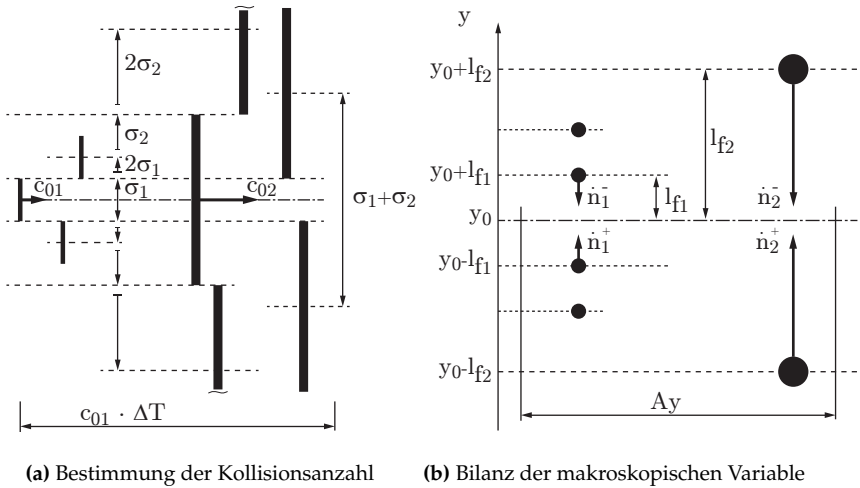


Abbildung O.1.: Vereinfachte Modellvorstellungen zum ETM

Teilchen der Sorte 1 ist.

$$s_{11} = \Delta V_{11} \cdot \frac{N_1}{V} \quad (\text{O.9})$$

$$\Delta V_{11} = \frac{\pi}{4} (2 \cdot \sigma_1)^2 \cdot c_{01} \cdot \Delta t = \pi \cdot \sigma_1^2 \cdot c_{01} \cdot \Delta t \quad (\text{O.10})$$

$$\frac{N_1}{V} = n_1 \quad (\text{O.11})$$

Anzahl der Kollisionen von Teilchen der Sorte 1 mit Teilchen der Sorte 2 Die Anzahl aller Teilchen, die sich in einem zylindrischen Volumen ΔV_{12} aufhalten, dessen Durchmesser genau der Summe der Teilchendurchmesser beider Spezies entspricht und dessen Länge von einem Teilchen mit der thermischen Geschwindigkeit c_{01} genau in der Zeit Δt durchflogen wird, entspricht der Kollisionsanzahl S_{12} . Es gilt daher Gl. O.12, wobei σ_2 der Van der Waals Durchmesser und n_2 die räumliche Dichte der Teilchen der Sorte 2 ist.

$$s_{11} = \Delta V_{12} \cdot \frac{N_2}{V} \quad (\text{O.12})$$

$$\Delta V_{12} = \frac{\pi}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2 \cdot c_{01} \cdot \Delta t = \pi \cdot \sigma_1^2 \cdot c_{01} \cdot \Delta t \quad (\text{O.13})$$

$$\frac{N_2}{V} = n_2 \quad (\text{O.14})$$

Nach Einsetzen der einzelnen Ausdrücke folgt die Kollisionsfrequenz zu Gl. O.15. Dieser Ausdruck deckt die Kollisionsfrequenz für ein einkomponentiges Gas mit ab

Gl. O.16.

$$\begin{aligned}\theta_s &= c_{0_1} \cdot \pi \cdot \left[\sigma_1^2 \cdot n_1 + \frac{n_2}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2 \right] \\ &= c_{0_2} \cdot \pi \cdot \left[\sigma_2^2 \cdot n_2 + \frac{n_1}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2 \right]\end{aligned}\quad (\text{O.15})$$

$$\equiv c_0 \cdot \pi \cdot \sigma^2 \cdot n \quad \forall \quad \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \quad \wedge \quad n_1 = n_2 = n \quad (\text{O.16})$$

Somit ergibt sich nach Gl. O.5 die mittlere freie Weglänge jeder Spezies zu Gl. O.17 und das Verhältnis beider zu K_{lf} Gl. O.18

$$\begin{aligned}l_{f_1} &= \frac{1}{\pi \cdot \left[\sigma_1^2 \cdot n_1 + \frac{n_2}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2 \right]} \\ l_{f_2} &= \frac{1}{\pi \cdot \left[\sigma_2^2 \cdot n_2 + \frac{n_1}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2 \right]}\end{aligned}\quad (\text{O.17})$$

$$K_{lf} = \frac{l_{f_1}}{l_{f_2}} = \frac{c_{0_1}}{c_{0_2}} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{\sigma_2^2 \cdot n_2 + \frac{n_1}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2}{\sigma_1^2 \cdot n_1 + \frac{n_2}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2} \quad (\text{O.18})$$

O.4. Thermische Geschwindigkeit

Zur Quantifizierung der mittleren freien Weglängen und der Kollisionsfrequenz werden noch die thermischen Geschwindigkeiten c_{0_n} benötigt. Dazu wird das zweite und dritte Newton'sche Axiom verwendet. Die Summe der Änderungen der Impulsströme \dot{I}_n aller Teilchen, die von der Fläche A_y reflektiert werden, entsprechen der Kraft, die auf diese Fläche wirkt. Mit der Definition des Drucks nach Gl. O.19

$$p = \frac{\dot{I}_n}{A_y} \quad (\text{O.19})$$

folgt dann das Kraftgleichgewicht zu Gl. O.20

$$p \cdot A_y = \dot{I}_1^+ - \dot{I}_1^- + \dot{I}_2^+ - \dot{I}_2^- \quad (\text{O.20})$$

$$= \dot{n}_1 [c_{0_1} \cdot m_1] - \dot{n}_1 [-c_{0_1} \cdot m_1] + \dot{n}_2 [c_{0_2} \cdot m_2] - \dot{n}_2 [-c_{0_2} \cdot m_2] \quad (\text{O.21})$$

Der Druck lässt sich mit der bereits getroffenen Annahme von thermisch idealem Gas Gl. H.23 auch durch die Boltzmann-Konstante k_B ausdrücken zu Gl. O.22, sofern annähernd thermodynamisches Gleichgewicht vorherrscht, was aufgrund des kleinen Betrachtungsbereichs als gegeben angenommen werden kann. Setzt man diese Formulierung in das Kraftgleichgewicht ein, folgt Gl. O.23.

$$p = \rho RT = nk_B T = [n_1 + n_2] k_B T \quad (\text{O.22})$$

$$[n_1 + n_2] k_B T = 2 \cdot [\dot{n}_1 \cdot m_1 \cdot c_{0_1} + \dot{n}_2 \cdot m_2 \cdot c_{0_2}] \frac{1}{A_y} \quad (\text{O.23})$$

O.5. Teilchenstromdichte bei 1/6 Modell

Die zur Bestimmung der thermischen Geschwindigkeit notwendige Teilchenstromdichte \dot{n}_n wird als Gl. O.24 angenommen. Dieser Ausdruck ist die Definition des 1/6 Modells.

$$\dot{n}_n \stackrel{!}{=} \frac{1}{6} \cdot c_{0n} \cdot n_n \cdot A_y \quad (\text{O.24})$$

Damit ergibt sich die Energieäquivalenzgleichung Gl. O.25, welche die makroskopisch definierte innere Energie des Gases $k_B T$ in molekularkinetischen Größen ausdrückt.

$$\frac{3}{2} k_B T = \frac{\dot{n}_1 \cdot m_1 \cdot \frac{c_{01}^2}{2} + \dot{n}_2 \cdot m_2 \cdot \frac{c_{02}^2}{2}}{n_1 + n_2} \quad (\text{O.25})$$

Hieraus folgen dann die thermischen Geschwindigkeiten zu Gl. O.26

$$c_{01} = \sqrt{\frac{3k_B T [n_1 + n_2]}{n_1 \cdot m_1 + n_2 \cdot m_2 \cdot K_{lf}^2}} \quad (\text{O.26})$$

$$c_{02} = \sqrt{\frac{3k_B T [n_1 + n_2]}{n_1 \cdot m_1 + n_2 \cdot m_2 \cdot K_{lf}^2}} \cdot K_{lf} \quad (\text{O.27})$$

O.6. Transport einer makroskopischen Variable bei zweikomponentigem Gas und 1/6 Modell im lokal thermodynamischen Gleichgewicht

Der Zusammenhang von makroskopischer Wirkung Λ und Variable Φ nach Gl. O.3 folgt nach Einsetzen der hergeleiteten Beziehungen zu Gl. O.28.

$$\Lambda = \frac{\sqrt{3k_B T [n_1 + n_2]}}{3\pi} \cdot \left[\frac{n_1 \cdot m_1 + n_2 \cdot m_2}{\sqrt{n_1 \cdot m_1 \cdot \left(\sigma_1^2 \cdot n_1 + \frac{n_2}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2 \right)^2 + n_2 \cdot m_2 \cdot \left(\sigma_2^2 \cdot n_2 + \frac{n_1}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2 \right)^2}} \right] \cdot \frac{d\Phi}{dy} \quad (\text{O.28})$$

P. Anwendung des erweiterten gaskinetischen Transportmodells

Dynamische Viskosität

$$\begin{aligned}
 \eta &\stackrel{\text{ETM}}{=} \frac{\sqrt{3k_B T [n_1 + n_2]}}{3\pi} \cdot \\
 &\quad \left[\frac{n_1 \cdot m_1 + n_2 \cdot m_2}{\sqrt{n_1 \cdot m_1 \cdot \left(\sigma_1^2 \cdot n_1 + \frac{n_2}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2 \right)^2 + n_2 \cdot m_2 \cdot \left(\sigma_2^2 \cdot n_2 + \frac{n_1}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2 \right)^2}} \right] \\
 &= \eta(T, m_1, m_2, n_1, n_2, \sigma_1, \sigma_2) = \eta(T, \xi_1, m_1, m_2, \sigma_1, \sigma_2) \quad (\text{P.1})
 \end{aligned}$$

Wärmeleitfähigkeit

$$\begin{aligned}
 \lambda &\stackrel{\text{ETM}}{=} \eta \cdot c_v \\
 &= \frac{\sqrt{3k_B T [n_1 + n_2]}}{3\pi} \cdot c_v \cdot \\
 &\quad \left[\frac{n_1 \cdot m_1 + n_2 \cdot m_2}{\sqrt{n_1 \cdot m_1 \cdot \left(\sigma_1^2 \cdot n_1 + \frac{n_2}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2 \right)^2 + n_2 \cdot m_2 \cdot \left(\sigma_2^2 \cdot n_2 + \frac{n_1}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2 \right)^2}} \right] \\
 &\quad (\text{P.2})
 \end{aligned}$$

Diffusionskoeffizient

$$\begin{aligned}
 D &\stackrel{\text{ETM}}{=} \frac{\eta}{\rho} \\
 &= \frac{\sqrt{3k_B T [n_1 + n_2]}}{3\pi \sqrt{n_1 \cdot m_1 \cdot \left(\sigma_1^2 \cdot n_1 + \frac{n_2}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2 \right)^2 + n_2 \cdot m_2 \cdot \left(\sigma_2^2 \cdot n_2 + \frac{n_1}{4} (\sigma_1 + \sigma_2)^2 \right)^2}} \\
 &\quad (\text{P.3})
 \end{aligned}$$

Q. Verwendete Werte in den teilchenkinetischen Modellen

Nachfolgend sind alle bei den teilchenkinetischen Modellen verwendeten Werte aufgelistet.

Q.1. Verwendete Werte zur Validierung des ETM

Für die Validierung des ETM anhand der Viskosität von Sauerstoff, Benzol und einem Gemisch aus beidem, werden folgende Werte verwendet:

$$\sigma_1 = 343 \cdot 10^{-12} \text{ m Teilchendurchmesser O}_2$$

$$\sigma_2 = 692 \cdot 10^{-12} \text{ m Teilchendurchmesser C}_6\text{H}_6$$

$$m_1 = 32 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg Teilchenmasse O}_2$$

$$m_2 = 78 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg Teilchenmasse C}_6\text{H}_6$$

Für das LJM werden die nachfolgenden Gleichungen Gl. Q.1, welche den Gleichungen 8.20-15 bis Gleichung 8.20-22 aus [38] entsprechen, sowie die angegebenen Werte Gl. Q.2 für Sauerstoff und Benzol, ebenfalls aus [38] (Seite 1213) entnommen,

verwendet.

$$\begin{aligned}
 \eta &= \frac{1 + Z_\eta}{X_\eta + Y_\eta} \\
 X_\eta &= \frac{x_1^2}{\eta_1} + \frac{2 \cdot x_1 \cdot x_2}{\eta_{12}} + \frac{x_2^2}{\eta_2} \\
 Y_\eta &= \frac{3}{5} \cdot A_{12} \cdot \left[\frac{x_1^2}{\eta_1} \frac{M_1}{M_2} + \frac{2 \cdot x_1 \cdot x_2}{\eta_{12}} \frac{[M_1 + M_2]^2}{4 \cdot M_1 \cdot M_2} \frac{\eta_{12}^2}{\eta_1 \cdot \eta_2} + \frac{x_2^2}{\eta_2} \frac{M_2}{M_1} \right] \\
 Z_\eta &= \frac{3}{5} \cdot A_{12} \cdot \left[x_1^2 \frac{M_1}{M_2} + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \left[\frac{[M_1 + M_2]^2}{4 \cdot M_1 \cdot M_2} \left[\frac{\eta_{12}}{\eta_1} + \frac{\eta_{12}}{\eta_2} \right] - 1 \right] + x_2^2 \frac{M_2}{M_1} \right] \\
 \eta_{12} &= \frac{5}{16} \cdot \frac{\sqrt{\pi \cdot m_{12} \cdot k_B \cdot T}}{\sigma_{12}^2 \cdot \pi \cdot \Omega_{12,22}} \\
 \eta_1 &= \frac{5}{16} \cdot \frac{\sqrt{\pi \cdot m_1 \cdot k_B \cdot T}}{\sigma_1^2 \cdot \pi \cdot \Omega_{1,22}} \\
 \eta_2 &= \frac{5}{16} \cdot \frac{\sqrt{\pi \cdot m_2 \cdot k_B \cdot T}}{\sigma_2^2 \cdot \pi \cdot \Omega_{2,22}} \\
 \sigma_{12} &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \\
 m_{12} &= \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}
 \end{aligned}
 \tag{Q.1}$$

$$\begin{aligned}
\text{Werte für } T &= 380 \text{ K} \\
\text{für } \sigma_1 &= 343 \cdot 10^{-12} \text{ m} \\
\epsilon_1 &= 113 \cdot k_B \Rightarrow T_{*1} = \frac{k_B \cdot T}{\epsilon_1} = 3,363 \Rightarrow \Omega_{1,22} = 0,999 \\
\text{für } \sigma_2 &= 692 \cdot 10^{-12} \text{ m} \\
\epsilon_2 &= 308 \cdot k_B \Rightarrow T_{*2} = \frac{k_B \cdot T}{\epsilon_2} = 1,234 \Rightarrow \Omega_{2,22} = 1,424 \\
\epsilon_{12} &= \sqrt{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2} \Rightarrow T_{*12} = \frac{k_B \cdot T}{\epsilon_{12}} = 2,037 \\
&\Rightarrow \Omega_{12,22} = 1,175 \wedge \Omega_{12,11} = 1,075 \\
&\Rightarrow A_{12} = \frac{\Omega_{12,22}}{\Omega_{12,11}} = 1,093 \\
\text{für } \sigma_2 \text{ verringert } \sigma_2 &= 562 \cdot 10^{-12} \text{ m} \\
\epsilon_2 &= 335 \cdot k_B \Rightarrow T_{*2} = \frac{k_B \cdot T}{\epsilon_2} = 1,134 \Rightarrow \Omega_{2,22} = 1,375 \\
\epsilon_{12} &= \sqrt{\epsilon_1 \cdot \epsilon_2} \Rightarrow T_{*12} = \frac{k_B \cdot T}{\epsilon_{12}} = 1,953 \\
&\Rightarrow \Omega_{12,22} = 1,186 \wedge \Omega_{12,11} = 1,084 \\
&\Rightarrow A_{12} = \frac{\Omega_{12,22}}{\Omega_{12,11}} = 1,094 \quad (\text{Q.2})
\end{aligned}$$

Für die Validierung des ETM anhand der Viskosität von Wasserstoff, Argon und einem Gemisch aus beidem, werden folgende Werte verwendet:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= 295 \cdot 10^{-12} \text{ m Teilchendurchmesser H}_2 \\
\sigma_2 &= 340 \cdot 10^{-12} \text{ m Teilchendurchmesser Ar} \\
m_1 &= 2 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg Teilchenmasse H}_2 \\
m_2 &= 39 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg Teilchenmasse Ar}
\end{aligned}$$

Q.2. Verwendete Werte im ETM für Naphthalin-Luft-Gemisch

Für die Quantifizierung der Viskosität, der Wärmeleitfähigkeit sowie des Diffusionskoeffizienten mittels ETM von Luft und Naphthalin-Dampf sowie einem Gemisch aus beidem, werden folgende Werte verwendet:

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= 375 \cdot 10^{-12} \text{ m Teilchendurchmesser Luft; abgeleitet aus [38]} \\
\sigma_2 &= 880 \cdot 10^{-12} \text{ m Teilchendurchmesser C}_{10}\text{H}_8; \text{ abgeleitet aus [98]} \\
m_1 &= 30 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg Teilchenmasse Luft} \\
m_2 &= 129 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg Teilchenmasse C}_{10}\text{H}_8
\end{aligned}$$

Q.3. Molare Wichtung

Zur molaren Wichtung der Größe G wird die Gleichung Gl. Q.3 verwendet.

$$G = \frac{1}{\left(\frac{x_1}{\sqrt{G_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{G_2}}\right)^2} \quad (\text{Q.3})$$

$$\text{mit } x_1 = \xi_1 \wedge x_2 = \xi_2 \quad (\text{Q.4})$$

Q.3.1. Molare Wichtung der Viskosität

Die molare Wichtung der Viskositäten der reinen Spezies η_1 und η_2 erfolgt durch Gl. Q.3 und liefert die Gleichung Gl. Q.5.

$$\eta = \frac{1}{\left(\frac{x_1}{\sqrt{\eta_1}} + \frac{x_2}{\sqrt{\eta_2}}\right)^2} \quad (\text{Q.5})$$

$$\text{mit } x_1 = \xi_1 \wedge x_2 = \xi_2 \quad (\text{Q.6})$$

Q.4. Wichtungsmodell zur Viskosität von Gemischen

Das WTM entspricht der Gleichung 11 aus [2].

$$\eta = \frac{\eta_1}{1 + \frac{\frac{x_2}{x_1} \left[1 + \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}} \left[\frac{M_2}{M_1} \right]^{1/4} \right]^2}{\frac{4}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{M_1}{M_2}}}} + \frac{\eta_2}{1 + \frac{\frac{x_1}{x_2} \left[1 + \sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}} \left[\frac{M_1}{M_2} \right]^{1/4} \right]^2}{\frac{4}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{M_2}{M_1}}}} \quad (\text{Q.7})$$

Für die Validierung des ETM anhand der Viskosität von Wasserstoff, Argon und einem Gemisch aus beidem bei 293 K, werden folgende Werte verwendet:

$$\sigma_1 = 295 \cdot 10^{-12} \text{ m Teilchendurchmesser H}_2$$

$$\sigma_2 = 340 \cdot 10^{-12} \text{ m Teilchendurchmesser Ar}$$

$$m_1 = 2 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg Teilchenmasse H}_2$$

$$m_1 = 39 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg Teilchenmasse Ar}$$

Q.5. Modelle zum Diffusionskoeffizienten von binären Gemischen

Das Modell FULLER aus [46], aber auch zu finden in [99], [45], [37].

$$D_{12} = \frac{1,43 \cdot 10^{-7} \cdot T^{1,75} \sqrt{\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}}}{p(T) \left[[\Sigma V_{i,1}]^{1/3} + [\Sigma V_{i,2}]^{1/3} \right]^2} \quad (\text{Q.8})$$

mit

$$[T] = \text{K}$$

$$[p] = 10^5 \text{ Pa}$$

$$[M_s] = 10^{-3} \text{ kg/mol}$$

$$[V_{i,s}] = 1$$

$$[D_{12}] = \text{m}^2/\text{s}$$

$$p(T) \stackrel{!}{=} [n_1 \cdot m_1 \cdot R_1 + n_2 \cdot m_2 \cdot R_2] \cdot T$$

$M_1 = 0,030 \text{ kg/mol}$ Molare Masse Teilchen Luft

$M_2 = 0,129 \text{ kg/mol}$ Molare Masse Teilchen C_{10}H_8

$\sum V_{i,1} = 19,7$ Diffusionsvolumen Teilchen Luft

$\sum V_{i,2} = 10 \cdot 15,9 + 8 \cdot 2,31 - 2 \cdot 20,2 = 137,1$ Diffusionsvolumen C_{10}H_8

Das Modell MERSMANN aus [100]

$$D_{12} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{k^3}{\pi^3}} \sqrt{\frac{1}{2 \cdot m_1} + \frac{1}{2 \cdot m_2}} \cdot \frac{\sqrt{T^3}}{p(T) \cdot \sigma_{12}^2} \quad (\text{Q.9})$$

mit

$$[\sigma_{12}] = \text{m}$$

$$[T] = \text{K}$$

$$[p] = \text{Pa}$$

$$[m_i] = \text{kg}$$

$$[D_{12}] = \text{m}^2/\text{s}$$

$\sigma_{12} \hat{=} 6,4 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ Mittlerer Teilchendurchmesser C_{10}H_8 / Luft

$m_1 = 30 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ Masse Teilchen Luft

$m_2 = 129 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ Masse Teilchen C_{10}H_8

$$p(T) \stackrel{!}{=} [n_1 \cdot m_1 \cdot R_1 + n_2 \cdot m_2 \cdot R_2] \cdot T$$

Das Modell CHAPMAN aus [101]

$$D_{12} = \frac{0,0018583 \cdot 10^{-4}}{\Omega_{D,12} \cdot p \cdot \sigma_{12}^2} \cdot \sqrt{T^3 \left[\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2} \right]} \quad (\text{Q.10})$$

mit

$$[\sigma_{12}] = 10^{-10} \text{ m}$$

$$[T] = \text{K}$$

$$[p] = 10^5 \text{ Pa}$$

$$[M_i] = \text{g/mol}$$

$$[D_{12}] = \text{m}^2/\text{s}$$

$$\Omega_{D,12} \stackrel{!}{=} 1$$

$\sigma_{12} \hat{=} 6,4 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ Mittlerer Teilchendurchmesser C_{10}H_8 / Luft

$M_1 = 30 \text{ g/mol}$ Molmasse Luft

$M_2 = 129 \text{ g/mol}$ Molmasse C_{10}H_8

$$p \hat{=} 10^5 \text{ Pa}$$

Das Modell CHO aus [51]

$$D_{12} = 8,17708 \cdot 10^{-11} \cdot T^{1,983} \quad (\text{Q.11})$$

mit

$$[T] = \text{K}$$

$$[D_{12}] = \text{m}^2 / \text{s}$$

Das Modell ICT aus [48]

$$D_{12} = D_{0,\text{ICT},293 \text{ K}} \cdot \left(\frac{T}{273} \right)^{2,00} \quad (\text{Q.12})$$

mit

$$[T] = \text{K}$$

$$[D_{12}] = \text{m}^2 / \text{s}$$

$$D_{0,\text{ICT},273 \text{ K}} = 5,13 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s} \text{ aus [48]}$$

Das Modell PRESSER aus [6]

$$D_{12} = D_{0,\text{PRESSER},300 \text{ K}} \cdot \left(\frac{T}{273} \right)^{1,75} \quad (\text{Q.13})$$

mit

$$[T] = \text{K}$$

$$[D_{12}] = \text{m}^2 / \text{s}$$

$$D_{0,\text{PRESSER},273 \text{ K}} = 5,185 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s} \text{ in [6] falsch zitiert aus [48]; müsste eigentlich } D_{0,\text{ICT},273 \text{ K}} = 5,13 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s} \text{ sein.}$$

Das Modell CHEN aus [47]

$$D_{12} = D_{0,\text{CALDWELL},303,2 \text{ K}} \cdot \left(\frac{T}{303,2} \right)^{1,81} \quad (\text{Q.14})$$

mit

$$[T] = \text{K}$$

$$[D_{12}] = \text{m}^2 / \text{s}$$

$$D_{0,\text{CALDWELL},303,2 \text{ K}} = 8,10 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s} \text{ aus [49]}$$

Q.6. Empirische Korrelationen

Die empirischen Korrelationen entstammen alle aus [37]. Mit Ausnahme der Werte für Luft bei hoher Temperatur, welche durch Luft* gekennzeichnet ist. Diese stammen aus [39] und teilweise aus [40].

Viskosität

$$\eta = A + B \cdot T + C \cdot T^2 + D \cdot T^3 + E \cdot T^4 \quad (\text{Q.15})$$

$$\text{mit} \quad [\eta] = \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{s}} \quad [T] = \text{K}$$

$$\begin{aligned} \text{für O}_2 \quad & A = -0,10257 \cdot 10^{-15}; \quad B = 0,92625 \cdot 10^{-7} \\ & C = -0,80657 \cdot 10^{-10}; \quad D = 0,05113 \cdot 10^{-12} \\ & E = -0,01295 \cdot 10^{-15} \end{aligned} \quad (\text{Q.16})$$

$$\begin{aligned} \text{für C}_6\text{H}_6 \quad & A = 0,00177 \cdot 10^{-15}; \quad B = 0,25542 \cdot 10^{-7} \\ & C = -0,00711 \cdot 10^{-10}; \quad D = 0; \quad E = 0 \end{aligned} \quad (\text{Q.17})$$

$$\begin{aligned} \text{für Luft} \quad & A = -0,03287 \cdot 10^{-5}; \quad B = 0,77996 \cdot 10^{-7} \\ & C = -0,48801 \cdot 10^{-10}; \quad D = 0; \quad E = 0 \end{aligned} \quad (\text{Q.18})$$

$$\begin{aligned} \text{für C}_{10}\text{H}_8 \quad & A = -0,10205 \cdot 10^{-15}; \quad B = 0,24744 \cdot 10^{-7} \\ & C = -0,04743 \cdot 10^{-10}; \quad D = 0; \quad E = 0 \end{aligned} \quad (\text{Q.19})$$

$$\begin{aligned} \text{für Luft*} \quad & A = 5 \cdot 10^{-6}; \quad B = 5 \cdot 10^{-8} \\ & C = -1,14 \cdot 10^{-11}; \quad D = 0; \quad E = 0 \end{aligned} \quad (\text{Q.20})$$

Isochore spezifische Wärmekapazität

$$c_v = c_p - R \quad (\text{Q.21})$$

$$c_p = A + B \cdot T + C \cdot T^2 + D \cdot T^3 + \frac{E}{T^2} \quad (\text{Q.22})$$

$$\text{mit} \quad [c_p] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \quad [T] = \text{K}$$

$$\text{für Luft} \quad A = 1070,30; \quad B = -0,564$$

$$C = 0,001507; \quad D = -0,001102 \cdot 10^{-3}$$

$$E = -0,000014 \cdot 10^{-3}$$

$$R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \quad (\text{Q.23})$$

$$\text{für Naphthalin} \quad A = -349,00; \quad B = 5,678$$

$$C = 0,003584; \quad D = -0,00083 \cdot 10^{-3}$$

$$E = -0,005007 \cdot 10^{-3}$$

$$R = 64 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \quad (\text{Q.24})$$

für Luft*

$$c_v = c_p - R \quad (\text{Q.25})$$

$$c_p = A + B \cdot T + C \cdot T^2 + D \cdot T^3 + E \cdot T^4 \quad (\text{Q.26})$$

$$\text{mit} \quad [c_p] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \quad [T] = \text{K}$$

$$A = 1019,8; \quad B = -0,1974$$

$$C = 0,0006; \quad D = -3,6 \cdot 10^{-7}; \quad E = 7 \cdot 10^{-11}$$

$$R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \quad (\text{Q.27})$$

Wärmeleitfähigkeit

$$\lambda = A + B \cdot T + C \cdot T^2 \quad (\text{Q.28})$$

$$\text{mit} \quad [\lambda] = \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} \quad [T] = \text{K}$$

$$\text{für Luft} \quad A = -0,37 \cdot 10^{-3}; \quad B = 0,103 \cdot 10^{-3}$$

$$C = -0,04657 \cdot 10^{-6} \quad (\text{Q.29})$$

$$\text{für Naphthalin} \quad A = -9,55 \cdot 10^{-3}; \quad B = 0,053 \cdot 10^{-3}$$

$$C = -0,02349 \cdot 10^{-6} \quad (\text{Q.30})$$

für Luft*

$$A = 0,0065; \quad B = 7 \cdot 10^{-5}$$

$$C = -0,9 \cdot 10^{-8} \quad (\text{Q.31})$$

Q.7. Freiheitsgrade von Teilchen

Die Freiheitsgrade FG von Teilchen lassen sich rein theoretisch abschätzen nach Gl. Q.32.

$$FG = FG_{\text{Translation}} + FG_{\text{Rotation}} + FG_{\text{Oszillation}} \quad (\text{Q.32})$$

$$FG_{\text{Translation}} = 1 \cdot \text{Richtungen} \quad \text{Anregung schon bei geringen Temperaturen}$$

$$FG_{\text{Rotation}} = 1 \cdot \text{Richtungen} \quad \text{Anregung schon bei geringen Temperaturen}$$

$$FG_{\text{Oszillation}} = 2 \cdot \text{Bindungen} \quad \text{Anregung erst bei hohen Temperaturen}$$

$$\Rightarrow \text{Kugelförmiges Teilchen, z.B. einatomiges Molekül}$$

$$FG = 3 \quad (\text{Q.33})$$

$$\Rightarrow \text{Stabförmiges Teilchen, z.B. zweiatomiges Molekül}$$

$$FG = 3 + 2 + FG_{\text{Oszillation}} = 5 + FG_{\text{Oszillation}} \in [5; 7] \quad (\text{Q.34})$$

$$\Rightarrow \text{Flächiges Teilchen, z.B. mehratomiges Ringmolekül}$$

$$FG = 3 + 3 + FG_{\text{Oszillation}} = 6 + FG_{\text{Oszillation}} \in [6; \dots] \quad (\text{Q.35})$$

R. Algebraische Behandlung von Tensoren

R.1. Algebraische Umformung Spannungstensor

$$\tau_{ij} = \hat{\tau}_{ij} - \tilde{p}\delta_{ij} = \sigma_{ij} - p\delta_{ij} \quad (\text{R.1})$$

mit den inneren Spannungen:

$$\sigma_{ij} = 2\eta\dot{\epsilon}_{ij} + \lambda^*\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} \quad (\text{R.2})$$

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \right] = \hat{\epsilon}_{ij} + \frac{1}{3}\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} \quad (\text{R.3})$$

$$\hat{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \quad (\text{R.4})$$

$$\Rightarrow \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] + \frac{1}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (\text{R.5})$$

$$\Rightarrow \sigma_{ij} = \eta \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] + \eta \frac{2}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \lambda^* \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (\text{R.6})$$

und mit den Schubspannungen:

$$\hat{\tau}_{ij} = \eta \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] \quad (\text{R.7})$$

folgt:

$$\Rightarrow \tau_{ij} = \hat{\tau}_{ij} - \tilde{p}\delta_{ij} \quad (\text{R.8})$$

$$= \eta \left[\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right] + \eta \frac{2}{3} \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} + \lambda^* \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} - p\delta_{ij} \quad (\text{R.9})$$

$$\Rightarrow \tilde{p} = p\delta_{ij} - \left[\lambda^* + \eta \frac{2}{3} \right] \frac{\partial w_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \quad (\text{R.10})$$

R.2. Kronecker Delta

$$\begin{aligned}
 \delta_{ij} &= 0 \quad \forall i \neq j \\
 &= 1 \quad \forall i = j \\
 &\quad \forall i, j \in \mathbb{N} [1;3] \\
 v_j &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta_{ij} p) \\
 \Rightarrow v_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\underbrace{\delta_{11}}_1 p \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\underbrace{\delta_{12}}_0 p \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\underbrace{\delta_{13}}_0 p \right) \\
 \Rightarrow v_2 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\underbrace{\delta_{21}}_0 p \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\underbrace{\delta_{22}}_1 p \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\underbrace{\delta_{23}}_0 p \right) \\
 \Rightarrow v_3 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\underbrace{\delta_{31}}_0 p \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\underbrace{\delta_{32}}_0 p \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\underbrace{\delta_{33}}_1 p \right) \\
 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i} (\delta_{ij} p) &= \frac{\partial}{\partial x_j} (p) \\
 \text{Analog} \\
 \delta_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} &= \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \tag{R.11}
 \end{aligned}$$

R.3. Summenkonvention

Die Einstein'sche Summenkonvention für eine formal weniger aufwändige, vektorielle Schreibweise von Tensoren ist definiert als

$$a_i b_i \stackrel{!}{=} \sum_i (a_i b_i) \tag{R.12}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) \quad \forall i, j \in \mathbb{N} [1;3] \tag{R.13}$$

R.4. Indizierung bei Summenkonvention

$$\tau_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \left(\tau_{1j} \frac{\partial w_j}{\partial x_1} + \tau_{2j} \frac{\partial w_j}{\partial x_2} + \tau_{3j} \frac{\partial w_j}{\partial x_3} \right) \quad (\text{R.14})$$

$$\tau_{ji} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 \left(\tau_{1i} \frac{\partial w_i}{\partial x_1} + \tau_{2i} \frac{\partial w_i}{\partial x_2} + \tau_{3i} \frac{\partial w_i}{\partial x_3} \right) \quad (\text{R.15})$$

$$\forall i, j \in \mathbb{N} [1; 3]$$

$$\Rightarrow \tau_{ij} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} = \tau_{ji} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \quad (\text{R.16})$$

S. Herleitung des Modells der Freistrahlskrümmung

Das Modell wird in zwei Schritten hergeleitet. Zunächst erfolgt die Bestimmung des Verlaufs eines Stromfadens $y_S(x)$, der sich infolge der Coriolis-Wirkung krümmt. Anschließend werden mehrere dieser gekrümmten Stromfäden zu einem Freistrahл gemäß den in Kap. 5.2.3 aufgeführten Annahmen zusammengesetzt.

S.1. Stromfadenverlauf bei Orthogonalität von ω und u

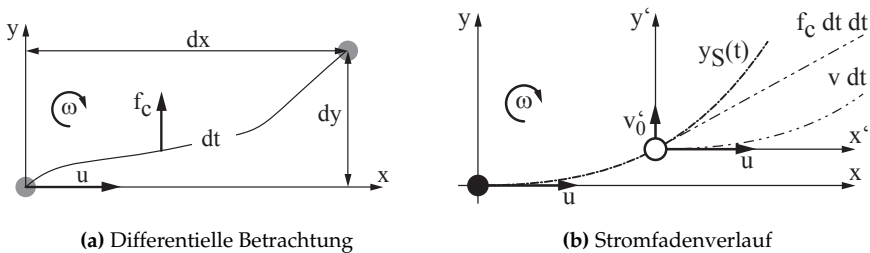


Abbildung S.1.: Skizzen zum Stromfadenverlauf des Modells der Freistrahlskrümmung

Kinetisches Verhalten Zur Definition der Größen siehe Abb. S.1a.

$$dx = u dt \quad (S.1)$$

$$dy = f_c dt dt \quad (S.2)$$

Coriolis-Wirkung entspricht Gl. 5.11

$$\vec{f}_c = -2\vec{\omega} \times \vec{u} = -2 \cdot \omega \cdot u \cdot \sin(\phi) \Rightarrow f_c \hat{=} -2 \cdot \omega \cdot u \quad \forall \phi = 90^\circ \quad \mathbb{R}^2 \quad (S.3)$$

Stromfadenverlauf Der Verlauf des Stromfadens Gl. S.7 ergibt sich durch gegenseitiges Einsetzen von Gl. S.1 bis Gl. S.3 sowie anschließende Integration. Zur Definition

der Größen siehe Abb. S.1b.

$$\Rightarrow dy = -2 \omega u \frac{dx}{u} \quad (S.4)$$

$$\Rightarrow y_S = -\frac{2 \omega}{u} \frac{x^2}{2} + C \quad (S.5)$$

$$\text{RB: } y_S(x=0) = 0 : \text{Koordinatenursprung in Anfangspunkt} \quad (S.6)$$

$$\Rightarrow y_S(x) = -\frac{\omega}{u} x^2 : \text{Stromfadenverlauf} \quad (S.7)$$

Unabhängigkeit der Lösung von den Randbedingungen Der Vollständigkeit halber wird kurz gezeigt, dass der Stromfadenverlauf Gl. S.7 unabhängig ist von der Wahl des Koordinatenursprungs also auch der Randbedingungen (RB). In einem mit ' gekennzeichneten Koordinatensystem, dessen Ursprung verschoben liegt zum bereits eingeführten Koordinatensystem, existiert dann eine Anfangsgeschwindigkeit v'_0 quer zum ungekrümmten Stromfaden. Zur Definition der Größen siehe Abb. S.1b.

$$dx' = u dt \quad (S.8)$$

$$dy' = f_c dt + v'_0 dt \quad (S.9)$$

$$\Rightarrow dy' = -2 \omega \frac{dx'}{u} + \frac{v'_0 dx'}{u} \quad (S.10)$$

$$\Rightarrow y'_S = -\frac{2 \omega}{u} \left[\frac{x'^2}{2} + x' C + D \right] + \frac{v'_0 x'}{u} + G \quad (S.11)$$

$$\text{RB: } y'_S(x'=0) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow H = -\frac{2 \omega D}{u} + G = 0 \quad (S.12)$$

$$\left. \frac{\partial y'_S}{\partial x'} \right|_{x'=0} \stackrel{!}{=} \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x \Rightarrow -\frac{2 \omega}{u} C \stackrel{!}{=} -\frac{2 \omega x}{u} \Rightarrow C = x + \frac{v'_0}{2 \omega} \quad (S.13)$$

$$\Rightarrow y'_S(x') = -\frac{\omega}{u} x^2 - x' \left[\frac{2 \omega}{u} \left[x + \frac{v'_0}{2 \omega} \right] - \frac{v'_0}{u} \right] \equiv y_S(x) \text{ q.e.d.} \quad (S.14)$$

S.2. Freistrahlskrümmung

Stromfadenverlauf bei Nichtorthogonalität von ω und u Der Verlauf des Stromfadens Gl. S.7 ergibt sich durch gegenseitiges Einsetzen von Gl. S.1 bis Gl. S.3 sowie anschließende Integration, wobei der projizierte Winkel ϕ zwischen Drehachse $\vec{\omega}$ und Geschwindigkeit \vec{u} beliebig sein kann. Zur Definition der Größen siehe Abb. S.1b sowie Abb. S.2.

$$\Rightarrow y_S(x, \phi) = -\frac{\omega \sin(\phi)}{u} x^2 : \text{Stromfadenverlauf} \quad (S.15)$$

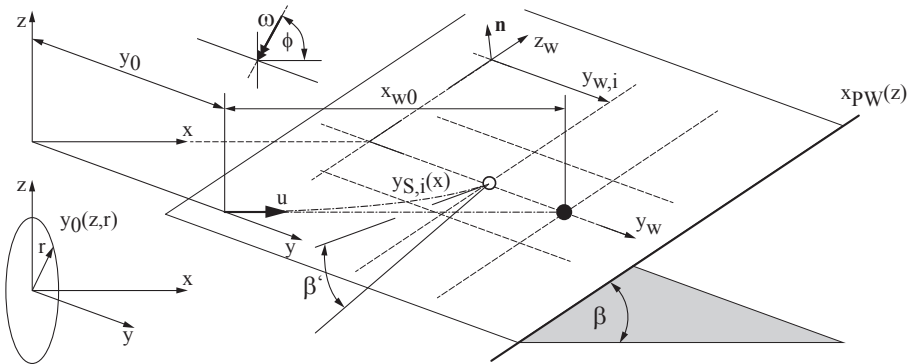


Abbildung S.2.: Koordinatendefinition zur Berechnung des Stromfadenverlaufs

Auftreffpunkt eines Stromfadens S, i

$$y_{S,i}(x_{\text{PW}}(z), \phi) = -\frac{\omega \sin(\phi)}{u} \cdot (x_{\text{PW}}(z))^2 + y_0 \quad (\text{S.16})$$

Kreisprofil der Freistrahlobohrung

$$y_0(z, r) = -\sqrt{r^2 - z^2} \quad (\text{S.17})$$

Prallwand

$$x_{\text{PW}}(z) = x_{w0} + \frac{z}{\tan(\beta)} \quad (\text{S.18})$$

Auftreffpunkt eines Stromfadens S_i in Koordinaten der Prallwand Durch gegenseitiges Einsetzen der zuvor genannten Gleichungen ergibt sich die Koordinate des Auftreffpunktes zu

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_{w,i}(r, z, \phi) &= -\frac{\omega \sin(\phi)}{u} \cdot (x_{\text{PW}}(z))^2 \pm y_0(z, r) \\ &= -\frac{\omega \sin(\phi)}{u} \cdot \left(x_{w0} + \frac{z}{\tan(\beta)}\right)^2 \pm \sqrt{r^2 - z^2} \quad (\text{S.19}) \end{aligned}$$

Auftreffwinkel eines Stromfadens S, i auf der Prallwand Durch reine Trigonometrie ergibt sich der Auftreffwinkel β' zu

$$\begin{aligned}
 \beta'(r, z, \phi) &= \arctan \left(\tan(\beta) \cdot \cos \left(\arctan \left(\frac{\partial y_{w,i}(r, z, \phi)}{\partial x} \Big|_{x_{PW}} \right) \right) \right) \\
 &= \arctan \left(\frac{\tan(\beta)}{\sqrt{\left(\frac{\partial y_{w,i}(r, z, \phi)}{\partial x} \Big|_{x_{PW}} \right)^2 + 1}} \right) = \arctan \left(\frac{\tan(\beta)}{\sqrt{\left(-\frac{2 \omega x_{PW}}{u} \right)^2 + 1}} \right) \\
 &= \arctan \left(\frac{\tan(\beta)}{\sqrt{\left(-\frac{2 \omega \left[x_{w0} + \frac{z}{\tan(\beta)} \right]}{u} \right)^2 + 1}} \right) \tag{S.20}
 \end{aligned}$$

Freistrahls mit Geschwindigkeitsprofil Die jeweilige Geschwindigkeit auf mehreren Stromfäden u wird ersetzt durch ein um x kreissymmetrisches Geschwindigkeitsprofil des Freistrahls $u(r)$. Dieses wird bis zum Auftreffen als unverändert angenommen.

$$u \stackrel{!}{=} u(r) \quad \wedge \quad \frac{\partial u(r)}{\partial x} \stackrel{!}{=} 0 \tag{S.21}$$

$$\Rightarrow y_S(r, z, \phi) = -\frac{\omega \sin(\phi)}{u(r)} \cdot \left(x_{w0} + \frac{z}{\tan(\beta)} \right)^2 \pm \sqrt{r^2 - z^2} \tag{S.22}$$

T. Stoffübergang bei der Zyklonkühlung

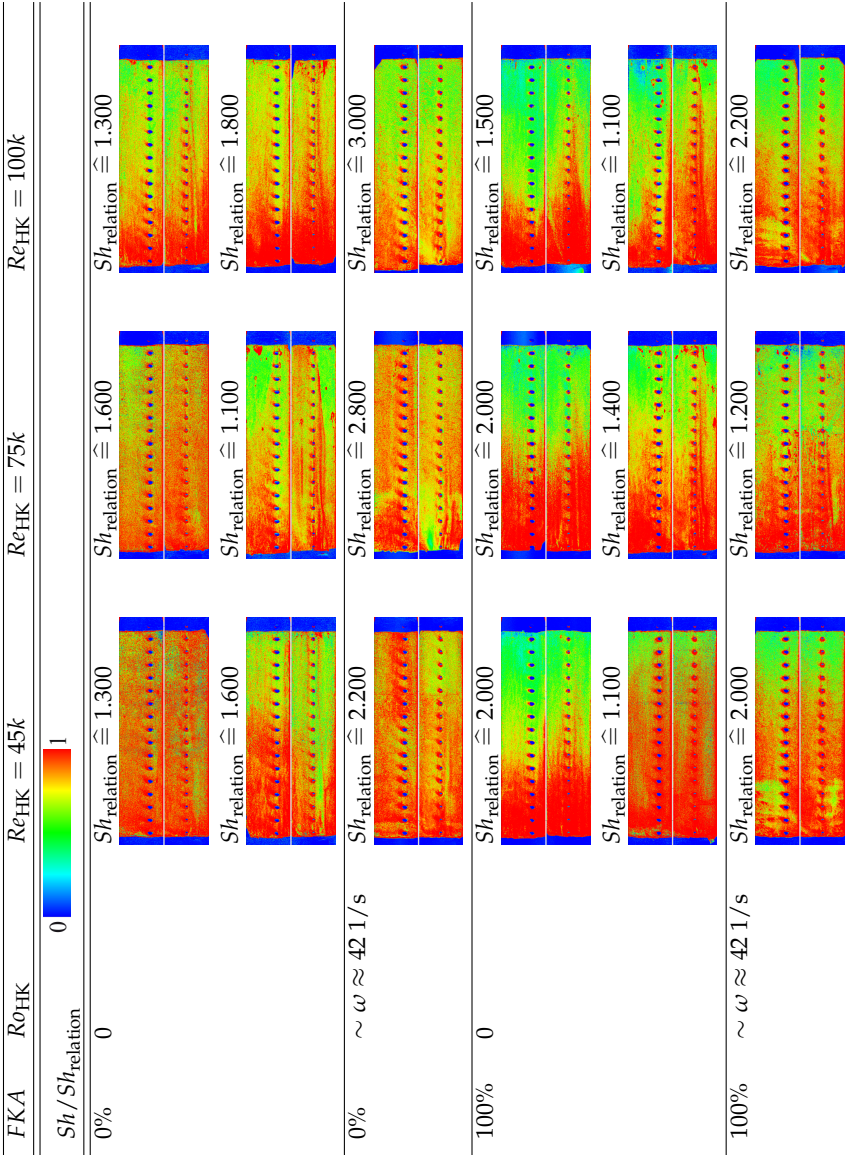


Tabelle T.1.: Sherwood-Zahl- Verteilung bei der Zyklonkühlung mit vollständiger und ohne Filmkühlnahme sowie mit und ohne Systemrotation